

## Resumen

En este trabajo se presentan diversos métodos históricos para la aproximación del número  $\pi$ , divididos en tres etapas: geométrica, del cálculo y moderna. Basándonos en estos enfoques, hemos implementado códigos en Python para ilustrar y comparar sus eficiencias.

## Objetivo

Investigar, analizar y comparar métodos de modelación matemática para la aproximación del número  $\pi$ , evaluando su precisión, eficiencia y convergencia.

## ¿Qué es el número $\pi$ ?

- Es la decimosexta letra del alfabeto griego.
- $\pi$  es la primera letra de la palabra griega *περιμετρο*, y de *περιφερεια*.
- Representa la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro.
- El símbolo  $\pi$  fue popularizado por Leonhard Euler en el siglo XVIII.
- Es un número irracional y trascendente.
- ¿Es normal?

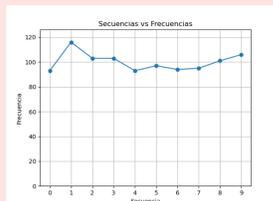


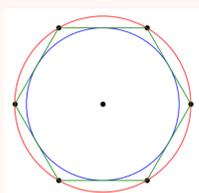
Figura 1. Análisis de la frecuencia de los dígitos del 0 al 9 en los primeros 1,000 dígitos decimales de  $\pi$ .

## Etapea Geométrica (Siglo III a.C.)

En esta etapa exploramos las técnicas iniciales para estimar el valor de  $\pi$ , las cuales fueron de tipo geométrico y prevalecieron durante alrededor de dos milenios.

$\pi$  **Sucesión de Arquímedes:**  $2^j 6 \cdot \sin \frac{30^\circ}{2^j} < \pi < 2^j 6 \cdot \tan \frac{30^\circ}{2^j}$ .

Arquímedes usó un polígono de 96 lados para calcular que  $\pi$  está entre  $3 \frac{1}{7}$  y  $3 \frac{10}{71}$ .



Lados	Polígono inscrito	Polígono circunscrito
6	3.464101615137754	3.464101615137754
12	3.105828541230248	3.215390309173473
24	3.132628613281234	3.159659942097500
48	3.139350203046866	3.146086215131434
96	3.141031950890505	3.142714599645368

Cuadro 1. Aproximaciones a  $\pi$  con la sucesión de Arquímedes.

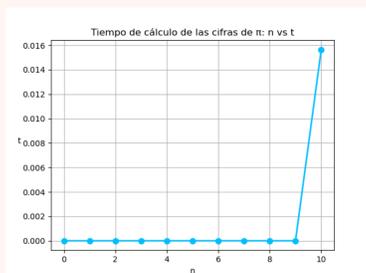
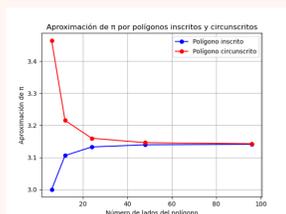


Figura 2. Con 16 duplicaciones del hexágono inscrito se obtienen 10 decimales de  $\pi$  en 0.016 segundos.

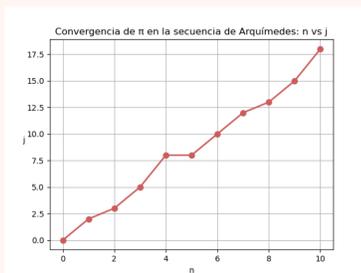


Figura 3. Con 18 duplicaciones del hexágono circunscrito se obtienen 10 decimales de  $\pi$  en pocos segundos.

## Etapea del cálculo (Siglo XVII)

Esta etapa trata sobre la transformación en la metodología para calcular  $\pi$ , pasando del método geométrico a un enfoque analítico, más eficiente y preciso.

**Teorema.**  $Arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$  converge para  $|x| \leq 1$ .

$\pi$  **Serie de Gregory-Leibniz con  $x = 1$**



Figura 4. Cálculo de 8 cifras decimales de  $\pi$ : 156,001,138 términos en 4.8 minutos.

$\pi$  **Serie de Sharp con  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$**



Figura 5. Cálculo de 100 cifras de  $\pi$ : 205 términos en 0.01 segundos.

## Combinaciones de arcotangentes

$\pi$  **Serie de John Machin**

$$\arctan 1 = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

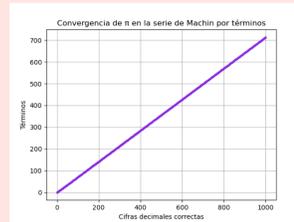


Figura 6. Cálculo de 1,000 cifras decimales de  $\pi$ : 713 términos en 39.2 segundos.

$\pi$  **Serie de Leonhard Euler**

$$\arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$



Figura 7. Cálculo de 1,000 cifras de  $\pi$ : 1,656 términos en 1.7 minutos.

$\pi$  **Serie de William Rutherford**

$$\arctan 1 = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{70} + \arctan \frac{1}{99}$$

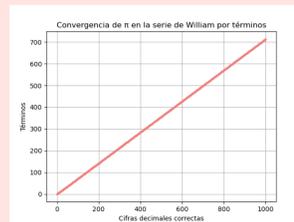


Figura 8. Cálculo de 1,000 cifras decimales de  $\pi$ : 713 términos en 58.6 segundos.

$\pi$  **Serie de L. K. Shulz**

$$\arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$$



Figura 9. Cálculo de 1,000 cifras de  $\pi$ : 1,656 términos en 1.9 minutos.

## Etapea moderna (Siglo XX)

La etapa moderna se caracteriza por el uso de computadoras y algoritmos avanzados para calcular  $\pi$  con alta precisión.

$\pi$  **Serie de Ramanujan:**  $\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4(396)^{4n}}$

Dígitos de $\pi$	Términos de la serie	Tiempo
100	12	5.0 seg
1,000	125	3.3 seg
10,000	1,250	3.6 seg
100,000	12,500	47.6 seg
1,000,000	125,000	1.8 horas

Cuadro 2. Fórmula de Ramanujan. 8 dígitos de  $\pi$  por cada término de la serie.

$\pi$  **Hermanos Chudnovsky:**

$$\frac{1}{\pi} = \frac{12}{640,320^3/2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(6k)!}{(3k)!(k!)^3} \frac{545,140,134k + 13,591,409}{640,320^{3k}}$$

Valor de $\pi$	Términos de la serie	Error	Tiempo
Aprox 100 dígitos de $\pi$	7	$2.2 \times 10^{-99}$	3.1 seg
Aprox 1,000 dígitos de $\pi$	72	$1.2 \times 10^{-1018}$	4.2 seg
Aprox 100,000 dígitos de $\pi$	7,143	$5.6 \times 10^{-100012}$	60.6 seg
Aprox 1,000,000 dígitos de $\pi$	71,429	$1.4 \times 10^{-1000015}$	1.4 hrs

Cuadro 3. Hermanos Chudnovsky. 14 dígitos de  $\pi$  por cada término de la serie.

Número de dígitos (millones)	Computadora	Año
480	CRAY-2, IBM 3090/VF	1989
535.3	IBM 3090	1989
1,011.1	IBM 3090	1989
2,260	máquina casera	1991
4,044	máquina casera	1994

Cuadro 4. Cálculo de millones de dígitos utilizando diversas computadoras con el Algoritmo de Chudnovsky.

## Conclusiones

- La eficacia del método de Arquímedes supera a la serie de Gregory-Leibniz debido a su convergencia más rápida. Sin embargo, al modificar la serie de Gregory-Leibniz se obtiene la serie de Sharp, la cual ha demostrado una convergencia aún más rápida.
- La fórmula de Ramanujan destaca por su capacidad para calcular una gran cantidad de dígitos de  $\pi$  en un número reducido de iteraciones, como demostraron los hermanos Chudnovsky en 1989.

## Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a la UACM por su apoyo en la realización de este trabajo así como a los organizadores del ENOAN por brindarme la oportunidad de presentarlo.

## Referencias

- Beckmann, P. (2006). *Historia de  $\pi$* . (Zadunaisky, P. Trad.). St. Martin's Press. (Obra original publicada en 1971).
- Berggren, L., Borwein, J. y Borwein, P. (1991). *Pi: A Source Book* (2da ed.). Springer.
- Navarro, J. (2010). *Los secretos del número  $\pi$ : ¿por qué es imposible la cuadratura del círculo?* RBA.
- Zhúkov, A.V. (2005). *El omnipresente número  $\pi$* . Editorial URSS, Moscú.
- Domínguez, M. F. (2024). *La convergencia del número  $\pi$* . (Tesis de Licenciatura, Universidad Autónoma de la Ciudad de México).