El método de Características

Est. Sarai Martínez Méndez, Est. Wendy Hernández Flores

Asesor: Dr. Jorge López López

*202a31010@alumno.ujat.mx

*202A31017@alumno.ujat.mx

Introducción

El método de las características es un método para resolver ecuaciones diferenciales parciales. En teoría se puede aplicar a cualquier ecuación hiperbólica, pero se aplica más frecuentemente a ecuaciones de primer orden. El método sigue varios pasos: i)encontrar una familia de curvas que cubran el dominio de la edp a lo largo de las cuales la edp se reduzca a una edo; ii)encontrar y resolver esta edo; iii)con la solución de la edo obtener la solución de la edp. En este trabajo describimos algunos detalles de este proceso. Las curvas características también tienen importancia en otras aplicaciones, por ejemplo en la solución numérica de las edp.

El problema y metodología

Consideramos la ecuación cuasinlineal (lineal en las derivadas u_x, u_t)

$$a(x,t,u)u_x + b(x,t,u)u_t = c(x,t,u), \qquad (1)$$

$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Definición 1. Consideremos que tanto x como t dependen de un parámetro p: $x = x(p)$ y $t = t(p)$, al sistema

$$\begin{cases} x' = a(x,t,u), x' = \dfrac{dx}{dp} \\ t' = b(x,t,u), t' = \dfrac{dt}{dp} \\ v' = c(x,t,u), v' = \dfrac{dv}{dp} \end{cases} \qquad (2)$$

se le llama *sistema característico* o *sistema de Lagrange -Charpit* de la ecuación 1. Si el sistema característico tiene solución, las curvas definidas por (x,t) se llaman *curvas características* de la edp.

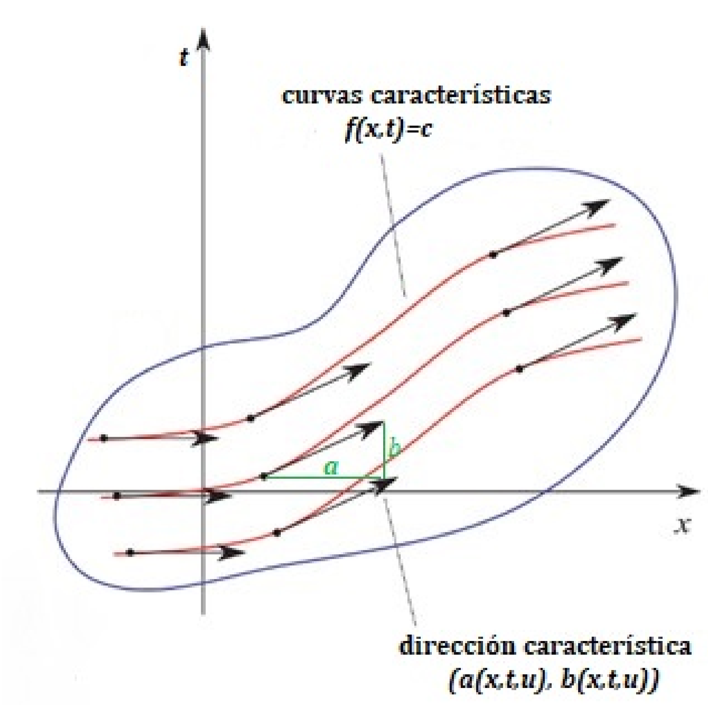

Fig. 1. Curvas características y dirección característica.

El término de la izquierda de la EDP 1 representa la derivada de u en la dirección $(a(x,t,u), b(x,t,u))$ en los puntos en los cuales no son simultáneamente nulos los coeficientes $a(x,t,u)$ y $b(x,t,u)$.

Teorema 2. La EDP 1, restringida a las curvas características es la EDO (2.3).

Demostración.

Definimos v como la restricción de u a las características: $v(p) = u(x(p,q), t(p,q))$. Derivando respecto de p:

$$v'(p) = \frac{\partial v}{\partial p}(x(p,q), t(p,q)) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial p}$$
$$= x_p u_x + t_p u_t = c(x,t,v).$$

Así que la EDO a la que se reduce la EDP 1 es $v'(p) = c(x,t,v)$.

El método de características consiste en resolver el sistema 2, es decir, de encontrar la solución u en las características, $v(p)$, y a partir de eso construir la solución $u(x,t)$. Ilustraremos el procedimiento completo con un ejemplo.

Ejemplo

Ejemplo. Consideremos

$$au_x + bu_t = 0.$$

En este caso, $a(x,t,u) = a$, $b(x,t,u) = b$ y $c(x,t,u) = 0$ son constantes.

Paso 1. Construimos el sistema característico:

$$x' = a; \; t' = b; \; u' = 0$$

Resolvemos el sistema característico:

$$x = ap + f_1(q); \quad t = bp + f_2(q); \quad u = f_3(q)$$

donde f_1, f_2 y f_3 son funciones arbitrarias.

Paso 2. Hallamos las curvas características despejando p de las soluciones del paso 1:

$$\frac{x - f_1(q)}{a} = \frac{t - f_2(q)}{b}$$
$$\Longrightarrow bx - bf_1(q) = at - af_2(q)$$
$$\Longrightarrow bx - at = bf_1(q) - af_2(q)$$

Pero como f_1 y f_2 son arbitrarias, las curvas características son la familia de rectas paralelas con ecuación

$$bx - at = g(q)$$

con g una función arbitraria (derivable).

Paso 3. Construimos la solución general $u(x,t)$. Notemos que:

$$g^{-1}(bx - at) = q$$
$$\Longrightarrow \quad u(x,y) = f_3(g^{-1}(bx - at))$$

Dado que f_3 y g^{-1} son funciones arbitrarias, nos queda lo siguiente

$$u(x,y) = f(bx - at)$$

con f función arbitraria derivable.

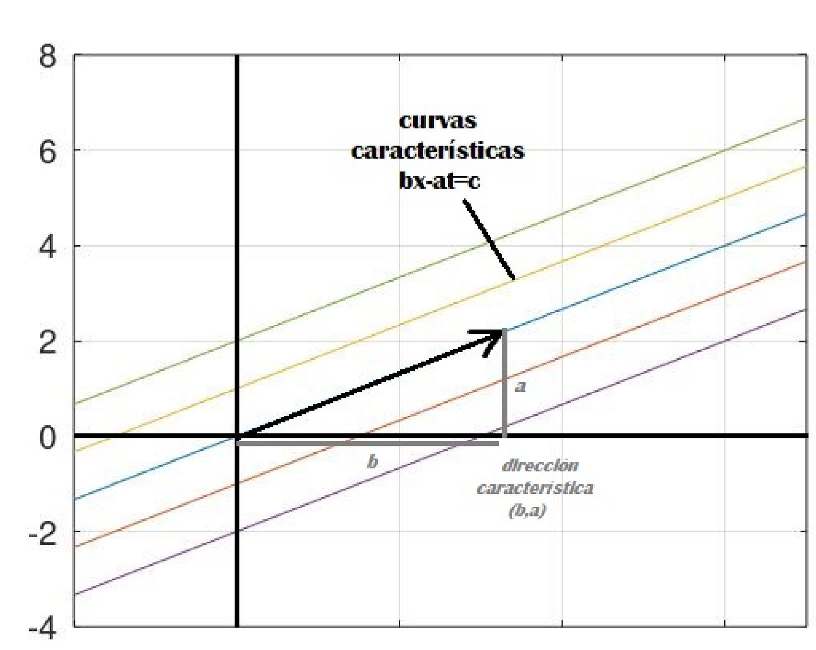

Fig. 2. Las curvas características del ejemplo son rectas con pendiente b/a.

Continuación del ejemplo

Si además tenemos una condición inicial:

$$u(x,0) = e^{-x^2}$$

de lo anterior tenemos que soluciones de la forma $u(x,t) = f(bx - at)$ satisfacen la EDP, por la condición inicial

$$e^{-x^2} = u(x,0) = f(bx)$$

tenemos que $f(x) = e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^2}$. Tomando $a = 1$ y $b = 1$, la gráfica de la solución sería la siguiente:

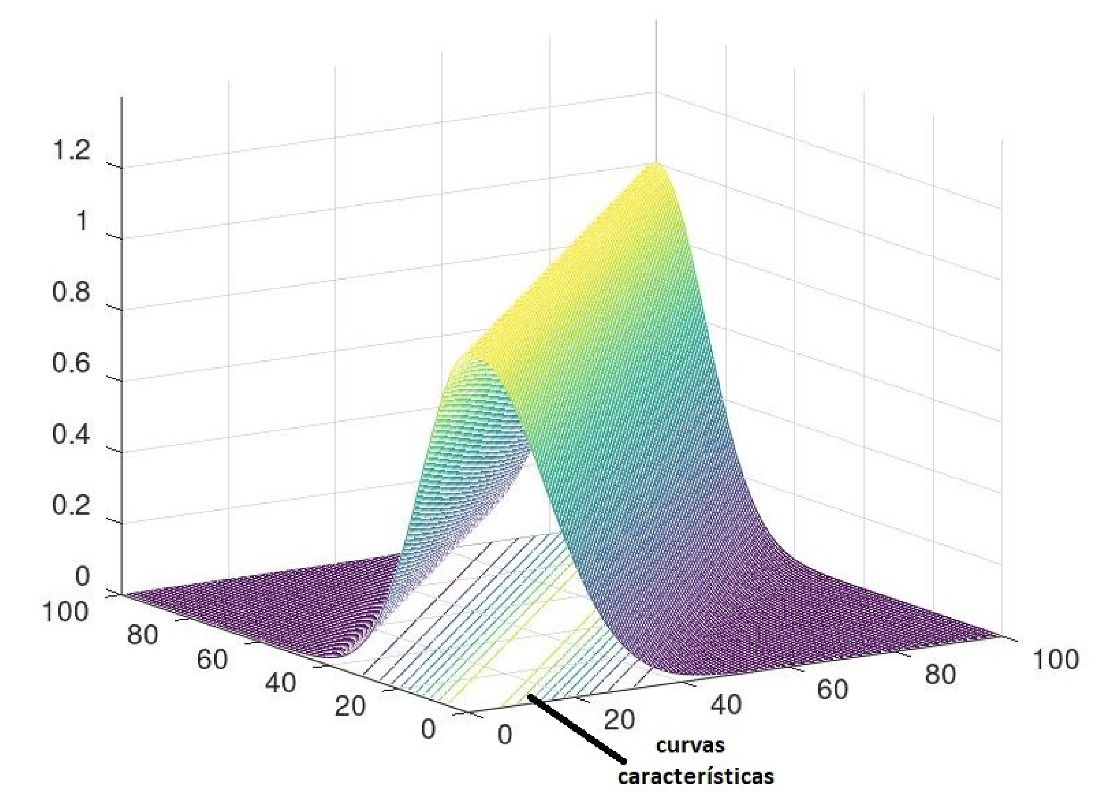

Fig. 3. Solución u para el ejemplo cuando la condición inicial es $u(x,0) = e^{-x^2}$, $u(x,t) = e^{-(x-t)^2}$.

Notemos que en este caso las curvas características coinciden con las curvas de nivel, donde son precisamente rectas con pendiente 1.

Resultados y Conclusión

El método de características para resolver ecuaciones de primer orden nos permite reducir una edp a una edo y resolverla mediante sus ecuaciones características. En algunos casos estas coinciden con las curvas de nivel de la solución, lo que ocurre cuando la edo a la que se reduce la edp es homogénea, como fue nuestro caso.

Si consideramos la edp $u_t + cu_x = -u \in \mathbb{R}^2$, $u(x,0) = f(x)$ tendremos que las curvas características siguen siendo rectas, sin embargo, para este caso ya no son curvas de nivel.

Bibliografía

*P. Colleman, M. (2013). An Introduction to Paritial Differential Equations with MATLAB. New York: CRC Press.

*Giordano, C. M. (2017). Ecuaciones Diferenciales Parciales. Buenos Aires: Edulp.

* Peral Alonso, I. (2004). Primer curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Madrid.

* M. Cooper, J. (1998). Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB. New York: Birkhäuser.

* MateFacil.(15 de agosto de 2019).27. EDP: Método de las curvas características, EXPLICACIÓN COMPLETA [Archivo de vídeo].Youtube.https://youtu.be/q4UG3OTwDQw?si=G2eYhLO_xAgs3WW9