



Solución numérica de la interacción de 2 especies, con difusión

L. M. Saúl David Candellero Jiménez;¹ Dr. Jorge López López

¹232A21002@alumno.ujat.mx

Introducción

Normalmente, en los sistemas de poblaciones clásicos se estudian las interacciones entre especies a través del tiempo, pero homogéneos en el espacio. En este cartel expondremos un caso particular de dinámica poblacional con difusión en 1 dimensión espacial, es decir, trabajaremos con un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de reacción-difusión.

Planteamiento del problema

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones que determina la dinámica de 2 poblaciones

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_1 \rho \left(1 - \frac{u_1}{R}\right) - \frac{au_1u_2}{u_1^2 + b}, \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{ac_1u_2u_1}{u_1^2 + b} - c_2u_2. \end{aligned}$$

Reescribimos el sistema como $U_t = F(U)$ donde $U = (u_1, u_2)$. Los puntos de equilibrio de este sistema son

$$U_{10} = (0, 0), \quad U_{20} = (R, 0) \quad \text{y} \quad U_{30} = \left(s, \frac{c_1R - s}{c_2R}\right), \quad s = \frac{ac_1 \pm \sqrt{c_1^2a^2 - 4bc_2^2}}{2c_2}.$$

Generalizando el modelo considerando que las poblaciones pueden moverse (difusivamente) a lo largo de la variable espacial x en $(0, L)$ (y y en $(0, N)$ si pensamos en 2D). Con esto el modelo queda como:

$$U_t - MU_{xx} = F(U), \quad (1)$$

donde $M \in Mat_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

En este caso agregamos las condiciones de frontera $U_x(0, t) = 0$, $U_x(L, t) = 0$ y la condición inicial $U(X, 0) = f(x)$.

Es sencillo notar que cada equilibrio del sistema $U_t = F(U)$, induce un equilibrio del sistema (1) y las condiciones de frontera dadas.

Planteando el problema numérico

Como deseamos conocer U sobre una región espacial $[0, L]$ y un intervalo de tiempo $[0, T]$ ($\Gamma = [0, L] \times [0, T]$), si decidimos discretizar U con respecto al tiempo, denotando $U(t_n) = U(X, n\Delta t)$ y usando una aproximación hacia atrás de orden 1 de la derivada, obtenemos de la ecuación (1) que U resuelve aproximadamente:

$$\frac{U(t_{n+1}) - U(t_n)}{\Delta t} - MU(t_{n+1})_{xx} = F(U(t_{n+1})).$$

Al despejar, obtenemos la siguiente ecuación

$$U(t_{n+1}) - \Delta t MU(t_{n+1})_{xx} = \Delta t F(U(t_{n+1})) + U(t_n). \quad (2)$$

De aquí, si evaluamos F en el tiempo n y no en el tiempo $n + 1$ obtenemos un esquema semi-implícito que resolvemos por elemento finito. En la siguiente sección describimos las ideas generales de este método, para el caso en que el dominio espacial Ω está en \mathbb{R}^2 . En el caso en que consideráramos difusión en dos variables espaciales, la ecuación a resolver en cada tiempo sería:

$$U(t_{n+1}) - \Delta t M(U(t_{n+1})_{xx} + U(t_{n+1})_{yy}) = \Delta t F(U(t_n)) + U(t_n). \quad (3)$$

Consideramos aquí que la matriz M es diagonal y contiene los coeficientes de difusión de cada especie.

Formulación del problema débil

Los problemas (3) en cada tiempo son de la forma $\alpha\omega - \nu\Delta\omega = f$, sin embargo en la práctica es mucho pedirle a la aproximación numérica que $\omega \in C^2(\Omega)$ (solución clásica). Esto motiva que en lugar de resolver el problema (3) se defina

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \exists g_1, \dots, g_n \in L^2(\Omega) \text{ tal que} \right. \\ \left. \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

y entonces se resuelva el problema: *Encontrar ω en H^1 tal que*

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla v \, dx \, dy - \alpha \int_{\Omega} \omega v \, dx \, dy = \int_{\Omega} f v \, dx \, dy, \quad \forall v \in H^1.$$

La ecuación anterior recibe el nombre de formulación débil de (3) y la función ω que la satisface se le llama una solución débil.

El problema de elemento finito

Resolver el problema por un método de elemento finito implica sustituir H_1 por un subespacio de dimensión finita, para lo cual definimos a τ_h una discretización por triángulos K del dominio Ω y considerando los siguientes conjuntos:

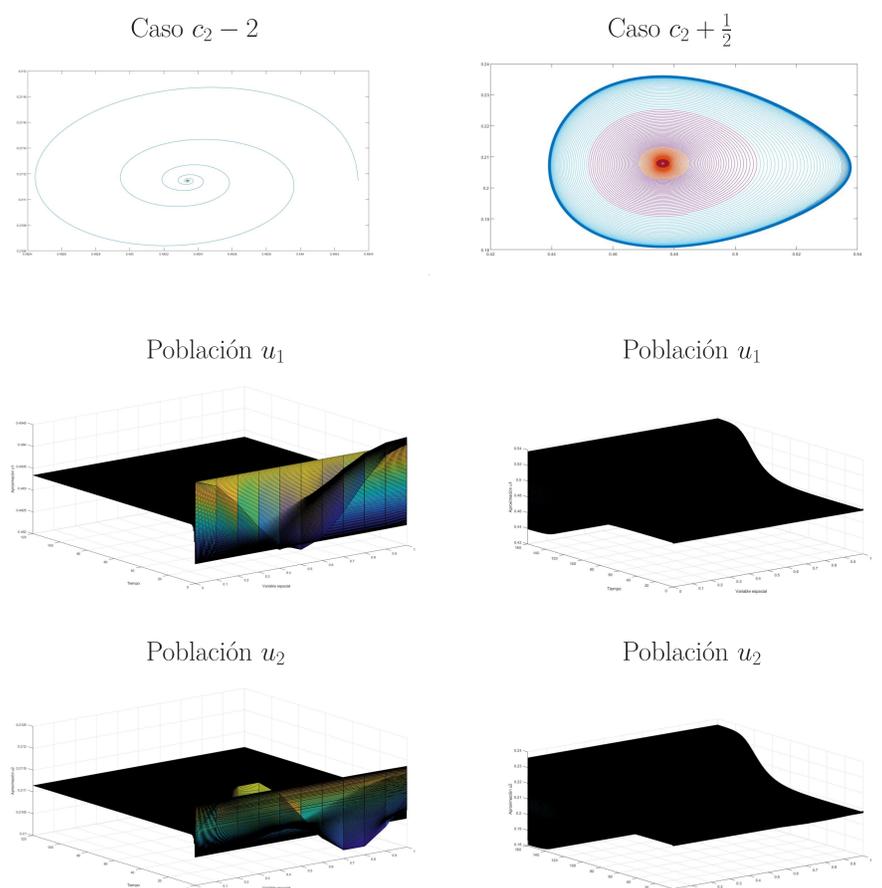
$$\begin{aligned} P_1(K) &= \{p : K \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x, y) = a + bx + cy\} \\ H_h(\Omega) &= \{w \in C^0(\Omega) : w|_K \in P_1(K), \forall K \in \tau_h\}. \end{aligned}$$

Los cuales nos permiten formar un sistema $Aw = b$, cuya solución w contiene, en la posición i -ésima, un valor aproximado para la función ω en el nodo i -ésimo de la triangulación τ_h .

Sobre la resolución numérica

Para nuestro caso fijamos $R = 1$, $\rho = \frac{328}{15}$, $a = \frac{82}{15}$, $c_1 = \frac{164}{15}$, $c_2 = 171.6533$. Un equilibrio no trivial con estos parámetros resulta ser $U^* = (0.4777, 0.2085)$. Tomamos como condición inicial $U_0(x) = U^* + 10^{-3}(\cos(2\pi x), \sin(2\pi(1-x)))$.

Presentamos los resultados obtenidos para $c_2 + \frac{1}{2}$ y $c_2 - 2$ en las siguientes figuras, obtenidas con un tamaño de paso $\Delta t = 0.001$, $\Delta x = 0.1$, la matriz de difusión $M = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$. En las figuras tridimensionales se muestra la evolución de las poblaciones u_1 y u_2 a lo largo del tiempo y a lo largo del espacio x . Las figuras bidimensionales muestran la curva de fase de las soluciones ancladas en el punto espacial $x = 0$.



Conclusiones

Para concluir, numéricamente podemos observar la posibilidad de bifurcación de Hopf alrededor del equilibrio U^* , asociada con el parámetro c_2 puesto que el equilibrio se vuelve un sumidero cuando consideramos $c_2 < c_2^*$ y un ciclo limite cuando consideramos $c_2^* < c_2$.

Referencias

- [1] Fu, S., He, X., Zhang, L. & Wen, Z. (2021). *Turing patterns and spatiotemporal patterns in a tritrophic food chain model with diffusion*. Nonlinear Analysis: Real World Applications.
- [2] Blé, G., Castellanos, V. & Dela-Rosa, M. A. (2018). Coexistence of species in a tritrophic food chain model with Holling functional response type IV. Mathematical Methods in the Applied Sciences.