

Modelo tritrófico de especies con efecto Allee aditivo.

Patricia Zavala Vazconcelos, Dr. Alejandro Peregrino Pérez, Dr. Luis Miguel Valenzuela Gómez.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, División Académica de Ciencias Básicas, Km 1, Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, c.p. 86690, Cunduacán, Tabasco, México. Julio 2022.
162A11013@egresados.ujat.mx



1. Introducción

El propósito de este cartel es presentar un modelo tritrófico de tiempo continuo de una cadena alimentaria: presa, depredador y superdepredador, que incorpora respuestas funcionales Holling tipo II y efecto Allee aditivo presentado por Supriya Mandal et al [2]. Se mostrará numéricamente que el caos en la cadena alimentaria de tres especies puede controlarse cuando las presas están sujetas al efecto Allee aditivo.

2. Modelo tritrófico de especies con efecto Allee aditivo.

Consideremos que X es el número de especies en el nivel más bajo de la cadena alimentaria (presa), Y el número de especies que dependen de X (depredador) y Z el número de especies que se alimentan de Y (superdepredador). El modelo de cadena alimentaria de tres especies con efecto Allee aditivo esta dado por

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= RX \left(1 - \frac{X}{K}\right) - \frac{MX}{B_a + X} - C_1 F_1(X)Y, \\ \frac{dY}{dt} &= F_1(X)Y - F_2(Y)Z - D_1 Y, \\ \frac{dZ}{dt} &= C_2 F_2(Y)Z - D_2 Z, \end{aligned} \quad (1)$$

con respuestas funcionales Holling tipo II, donde

$$F_i(V) = \frac{A_i V}{B_i + V}, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

R y K denotan la tasa de crecimiento intrínseca y la capacidad de carga, respectivamente. C_1 y C_2 son las tasas de conversión de presa a depredador para las especies Y y Z , respectivamente. La tasa de mortalidad de las especies Y y Z se indican con D_1 y D_2 . Las constantes A_i y B_i parametrizan la respuesta funcional de saturación. B_i es el nivel de la población de presas donde la tasa de depredación por unidad de presa es la mitad de su valor máximo. El término aditivo del efecto Allee es dado por $\frac{M}{B_a + X}$, donde M y B_a son la tasa de saturación del efecto Allee y el tamaño de la población de presas, respectivamente.

Para simplificar el modelo, usamos el cambio de variable

$$x = \frac{X}{K}, \quad t = RT, \quad y = \frac{C_1 Y}{K} \quad \text{y} \quad z = \frac{C_2 Z}{C_2 K} \quad (3)$$

como consecuencia tenemos que

$$X = Kx, \quad \frac{dX}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dx}{dt}, \quad Y = \frac{K}{C_1} y \quad \text{y} \quad Z = \frac{C_2 K}{C_1} z.$$

Derivando x en (3) y sustituyendo $\frac{dX}{dt}$ del modelo (1), obtenemos que

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{mx}{1+b_a x} - \frac{m_1 xy}{1+b_1 x}$$

De manera similar, derivamos y en (3) y sustituyendo $\frac{dY}{dt}$ del modelo (1) se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{m_1 xy}{1+b_1 x} - \frac{m_2 yz}{1+b_2 y} - d_1 y$$

Finalmente, derivando z en (3) y sustituyendo $\frac{dZ}{dt}$ del modelo (1) se obtiene

$$\frac{dz}{dt} = \frac{m_2 yz}{1+b_2 y} - d_2 z.$$

En resumen, el modelo (1) con efecto Allee aditivo puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{mx}{1+b_a x} - \frac{m_1 xy}{1+b_1 x} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{m_1 xy}{1+b_1 x} - \frac{m_2 yz}{1+b_2 y} - d_1 y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{m_2 yz}{1+b_2 y} - d_2 z, \end{aligned} \quad (4)$$

donde

$$m_1 = \frac{A_1 K}{R B_1}, \quad m_2 = \frac{A_2 C_2 K}{C_1 R B_2}, \quad b_1 = \frac{K}{R B_1}, \\ b_2 = \frac{C_2 K}{R B_2 C_1}, \quad d_1 = \frac{D_1}{R}, \quad d_2 = \frac{D_2}{R}.$$

3. Puntos de equilibrio.

Para calcular los puntos de equilibrio del modelo (4) resolvemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0, \\ \frac{dy}{dt} &= 0, \\ \frac{dz}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

i) Si $x = 0, y = 0$ y $z = 0$, entonces claramente se cumple (5). Por lo tanto, tenemos el punto de equilibrio trivial $E_0 = (0, 0, 0)$.

ii) Si $y = 0, z = 0$ y $x \neq 0$, para que se cumpla la ecuación (5), solo se requiere resolver $\frac{dx}{dt} = 0$, es decir,

$$x \left[(1-x) - \frac{m}{1+b_a x} \right] = 0.$$

Así para $x \neq 0$, se tienen las equivalencias

$$\begin{aligned} (1-x)(1+b_a x) - m &= 0 \\ b_a x^2 + x(1-b_a) + m - 1 &= 0 \end{aligned}$$

En conclusión, se tiene un punto de equilibrio en el eje x , $E_1 = (\bar{x}, 0, 0)$, donde \bar{x} es la raíz positiva de la ecuación cuadrática

$$b_a x^2 + (1-b_a)x + (1-m) = 0. \quad (6)$$

iii) Si $x \neq 0, y \neq 0$ y $z = 0$, entonces en (5) se tiene que resolver

$$\begin{aligned} x(1-x) - \frac{mx}{1+b_a x} - \frac{m_1 xy}{1+b_1 x} &= 0 \\ \frac{m_1 xy}{1+b_1 x} - d_1 y &= 0. \end{aligned}$$

Factorizando y en la segunda ecuación se obtiene

$$\left(\frac{m_1 x}{1+b_1 x} - d_1 \right) y = 0$$

o equivalentemente

$$\frac{m_1 x}{1+b_1 x} - d_1 = 0$$

despejando x obtenemos

$$x = \frac{d_1}{m_1 - d_1 b_1}$$

ahora factorizando x en la primera ecuación tenemos

$$x \left((1-x) - \frac{m}{1+b_a x} - \frac{m_1 y}{1+b_1 x} \right) = 0$$

o equivalentemente

$$(1-x) - \frac{m}{1+b_a x} - \frac{m_1 y}{1+b_1 x} = 0$$

al despejar y se obtiene

$$y = \frac{(1-x)(1+b_a x)(1+b_1 x) - m(1+b_1 x)}{m_1} = \frac{((1-x)(1+b_a x) - m)(1+b_1 x)}{m_1}$$

En conclusión, tenemos el punto de equilibrio $E_2 = (\bar{x}, \bar{y}, 0)$, donde

$$\bar{x} = \frac{d_1}{m_1 - d_1 b_1} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{((1-\bar{x})(1+b_a \bar{x}) - m)(1+b_1 \bar{x})}{m_1(1+b_1 \bar{x})}.$$

iv) Si $x \neq 0, y \neq 0$ y $z \neq 0$, entonces para encontrar el punto de equilibrio igualaremos a cero la tercera ecuación del modelo (4) teniendo que

$$z \left(\frac{m_2 y}{1+b_2 y} - d_2 \right) = 0.$$

Si $z \neq 0$, entonces

$$\frac{m_2 y}{1+b_2 y} - d_2 = 0$$

al despejar y obtenemos que

$$y^* = \frac{d_2}{m_2 - d_2 b_2}.$$

De manera similar, igualando a cero la segunda ecuación del modelo (4) se tiene que

$$y \left(\frac{m_1 x}{1+b_1 x} - \frac{m_2 z}{1+b_2 y} - d_1 \right) = 0.$$

Si $y \neq 0$, entonces

$$\frac{m_1 x}{1+b_1 x} - \frac{m_2 z}{1+b_2 y} - d_1 = 0$$

despejando z tenemos que

$$z^* = \left[\frac{m_1 x}{1+b_1 x} - d_1 \right] \frac{1+b_2 y^*}{m_2}.$$

Finalmente, igualando a cero la primera ecuación del modelo (4) obtenemos que

$$x \left(1-x - \frac{m}{1+b_a x} - \frac{m_1 y}{1+b_1 x} \right) = 0.$$

Si $x \neq 0$, entonces

$$1-x - \frac{m}{1+b_a x} - \frac{m_1 y}{1+b_1 x} = 0$$

despejando x se tiene que

$$\begin{aligned} -b_a b_1 x^3 + b_1 b_a x^2 - b_1 x^2 - b_a x^2 + b_a x^* + b_1 x^* - x^* \\ - b_1 m x^* - \frac{m_1 d_2 b_a x^*}{m_2 d_2 b_2} - \frac{m_1 d_2}{m_2 - d_2 b_2} - m + 1 = 0. \end{aligned}$$

Así x^* es la solución de la ecuación cúbica

$$P_1 x^3 + P_2 x^2 + P_3 x + P_4 = 0,$$

donde

$$P_1 = -b_a b_1, \quad P_2 = b_a b_1 - b_1 - b_a, \quad P_3 = b_a + b_1 - 1 - b_1 m - \frac{m_1 d_2 b_a}{m_2 - d_2 b_2} \quad \text{y}$$

$$P_4 = 1 - m - \frac{m_1 d_2}{m_2 - d_2 b_2}.$$

4. Análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio.

En esta sección damos los resultados teóricos cualitativos para el análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio [3].

Teorema 4.1. El punto de equilibrio $E_0 = (0, 0, 0)$ es estable si $m > 1$.

El punto de equilibrio axial $E_1 = (\bar{x}, 0, 0)$ es localmente asintóticamente estable si

$$m > (1+b_a \bar{x})(1-2\bar{x}), \quad \text{y} \quad d_1 > \frac{m_1 \bar{x}}{1+b_1 \bar{x}}.$$

El punto de equilibrio de la frontera $E_2 = (\bar{x}, \bar{y}, 0)$ es localmente asintóticamente estable si $\bar{\sigma}_1 > 0, \bar{\sigma}_3 > 0$ y $\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 > \bar{\sigma}_3$, donde $\bar{\sigma}_1 = -(Q_1 + Q_4 + Q_6), \bar{\sigma}_2 = Q_4 Q_6 + Q_1(Q_4 + Q_6) + Q_2 Q_3, \bar{\sigma}_3 = -(Q_1 Q_4 + Q_2 Q_3) Q_6$ con $Q_1 = (1-2\bar{x}) - \frac{m_1 \bar{y}}{(1+b_a \bar{x})^2} - \frac{m_1 \bar{y}}{(1+b_1 \bar{x})^2}, Q_2 = -\frac{m_1 \bar{x}}{1+b_1 \bar{x}}, Q_3 = \frac{m_1 \bar{y}}{(1+b_1 \bar{x})^2}, Q_4 = \frac{m_1 \bar{x}}{1+b_1 \bar{x}} - d_1, Q_5 = -\frac{m_2 \bar{y}}{1+b_2 \bar{y}}, Q_6 = \frac{m_2 \bar{y}}{1+b_2 \bar{y}} - d_2$.

El punto de equilibrio interior $E_3 = (x^*, y^*, z^*)$ es localmente asintóticamente estable si $\sigma_1 > 0, \sigma_3 > 0$ y $\sigma_1 \sigma_2 > \sigma_3$, donde $\sigma_1 = -(R_1 + R_4 + R_7), \sigma_2 = R_1 R_7 - R_1 R_4 - R_2 R_3 - R_3 R_6$ y $\sigma_3 = R_1 R_3 R_6 - R_1 R_4 R_7 - R_2 R_7 R_3$ con $R_1 = (1-2x^*) - \frac{m}{(1+b_a x^*)^2} - \frac{m_1 y^*}{(1+b_1 x^*)^2}, R_2 = -\frac{m_1 x^*}{1+b_1 x^*}, R_3 = \frac{m_1 y^*}{(1+b_1 x^*)^2}, R_4 = \frac{m_1 x^*}{1+b_1 x^*} - \frac{m_2 z^*}{(1+b_2 y^*)^2} - d_1, R_5 = -\frac{m_2 y^*}{1+b_2 y^*}, R_6 = \frac{m_2 y^*}{(1+b_2 y^*)^2} - d_2, R_7 = \frac{m_2 y^*}{1+b_2 y^*} - d_2$.

Teorema 4.2. El sistema (4), sufre una bifurcación de Hopf en torno al punto de equilibrio de coexistencia $E_3 = (x^*, y^*, z^*)$ siempre que el valor del parámetro crítico $\alpha = (m, m_1, m_2, b_a, b_1, b_2, d_1, d_2) = \alpha^* = (m^*, m_1^*, m_2^*, b_a^*, b_1^*, b_2^*, d_1^*, d_2^*)$ contenido en el siguiente dominio

$$\Gamma_{HB} = \{ \alpha^* \in \mathbb{R}^{8+} : \sigma_1(\alpha^*) \sigma_2(\alpha^*) - \sigma_3(\alpha^*) = 0, \text{ con } \sigma_2 > 0, \bar{\sigma}_3 - (\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 + \sigma_1 \bar{\sigma}_2) \neq 0 \}.$$

5. Simulaciones numéricas.

En esta sección haremos una simulación numérica empleando el software de Mathematica. Los parámetros utilizados en la simulación cumplen las condiciones dadas en los teoremas (4.1) y (4.2) para la estabilidad del punto de equilibrio $E_3 = (x^*, y^*, z^*)$ y la bifurcación de Hopf.

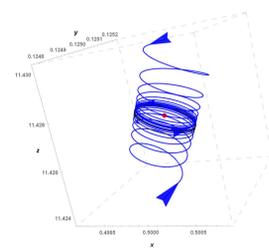


Figura 1: Estabilidad del sistema (4) tomando el conjunto de parámetros $d_1 = 0.86, d_2 = \frac{1}{100}, b_2 = 2, b_1 = 3, b_a = 2.8, m_2 = \frac{1}{10}, m_1 = 5$ y $m = 0.601$.

Conclusión

En el modelo 4 se puede determinar la existencia de las tres especies mediante un punto de equilibrio de coexistencia y además el modelo presenta una bifurcación de Hopf supercrítica mediante el parámetro de bifurcación d_1 , al obtener órbitas periódicas estables alrededor del punto de equilibrio esto nos garantiza la coexistencia de las tres especies, es decir, la existencia de presas, depredador y superdepredador en un mismo entorno.

Referencias

- [1] Kuznetsov YA, Rinaldi S. (1996). *Remarks on Food chain dynamics*. Math Biosci 134: 1-33.
- [2] Mandal S, Ray S and Basir F.A. (2020). *Additive Allee effect of top predator in a mathematical model of three species food chain*, Energy Ecology and Environment. Springer.
- [3] Perko Lawrence. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. (3rd Edition). Springer.