



ESTIMACIÓN DE PARAMETROS DEL MODELO SIR

María Elena Sánchez Valencia^{a,b}

Justino Alavez Ramírez^a

^aUJAT, ^bele_9129@alumno.ujat.mx



1. Introducción

En esta trabajo se presentan tres modelos epidemiológicos tomando como base el artículo de Hethcote (1989)[5]: el modelo SIS, SIR sin dinámica vital y con dinámica vital. En particular, se estiman la tasa de contacto diario β y la tasa de eliminación γ del virus del modelo SIR sin dinámica vital en tres casos: epidemia de gripe en un internado inglés en 1978 [1]; Eyam, la aldea de la peste en 1965 [7]; y un brote de viruela en Abakaliki, Nigeria en 1967 [2, 6].

2. Modelo SIS

Este modelo se utiliza para modelar enfermedades para las cuales la infección no confiere inmunidad. Se llama modelo SIS, debido a que los individuos regresan a la clase de susceptibles cuando se recuperan de la infección. Los nacimientos y muertes que ocurren naturalmente (dinámicas vitales) están incluidas, pero la conducta de las soluciones es similar cuando las dinámicas vitales no están incluidas.

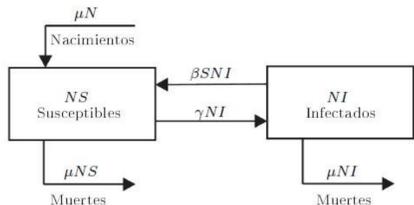


Figura 1: Diagrama compartimental del modelo SIS.

El problema de valor inicial (PVI) para el modelo SIS, formulado en términos de los tamaños de clases está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(NS)}{dt} &= -\beta NSI + \gamma NI + \mu N - \mu NS \\ \frac{d(NI)}{dt} &= \beta NSI - \gamma NI - \mu NI \\ NS(0) &= NS_0 > 0, \quad NI(0) = NI_0, \\ NS(t) + NI(t) &= N, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

donde β es una constante positiva. Dividiendo cada ecuación por el tamaño de población constante N , el PVI (1) en términos de las fracciones en las clases es:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= -\beta SI + \gamma I + \mu - \mu S \\ \dot{I} &= \beta SI - \gamma I - \mu I \\ S(0) &= S_0 > 0, \quad I(0) = I_0 > 0, \\ S(t) + I(t) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

3. Modelo SIR sin dinámica vital

En este modelo consideramos enfermedades para las cuales la infección confiere inmunidad permanente. Cuando una enfermedad SIR de este tipo ataca una población en un período relativamente corto (menos de un año), este brote de enfermedad se llama epidemia. Puesto que una epidemia ocurre con relativa rapidez, el modelo no incluye nacimientos ni muertes (dinámica vital). Las epidemias son comunes para enfermedades como la influenza, sarampión, rubéola y varicela. El diagrama compartimental de este modelo se muestra en la figura 2.



Figura 2: Diagrama compartimental del modelo SIR sin dinámica vital.

El problema de valor inicial para el modelo SIR sin dinámica vital es dado en (3):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(NS)}{dt} &= -\beta NSI \\ \frac{d(NI)}{dt} &= \beta NSI - \gamma NI \\ \frac{d(NR)}{dt} &= \gamma NI \\ NS(0) &= NS_0, \quad NI(0) = NI_0, \\ NR(0) &= NR_0 \geq 0 \\ NS(t) + NI(t) + NR(t) &= N, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

donde β y γ son constantes positivas.

Si cada ecuación en (3) la dividimos por el tamaño de la población constante N , entonces el problema de valor inicial se reduce a:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= -\beta SI \\ \dot{I} &= \beta SI - \gamma I \\ S(0) &= S_0 > 0, \quad I(0) = I_0 > 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

dado que $R(t)$ se puede encontrar a partir de $S(t)$ e $I(t)$ usando $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$, por lo que es suficiente considerar el PVI (4), en el plano fase SI.

4. Modelo SIR con dinámica vital

En esta sección se considera el comportamiento de la enfermedad en la población durante un largo periodo de tiempo. Una enfermedad se llama endémica si está presente en una población durante más de 10 o 20 años [5]. Porque durante el periodo largo de tiempo involucrado, un modelo para una enfermedad endémica debe incluir nacimientos como fuente de nuevos susceptibles y muertes naturales en cada clase. El diagrama compartimental para el modelo SIR con dinámica vital se muestra en la figura 3.

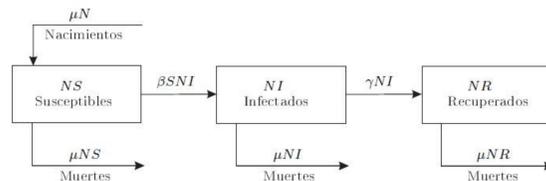


Figura 3: Diagrama compartimental del modelo SIR con dinámica vital.

El problema de valor inicial para el modelo SIR con dinámica vital es el siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(NS)}{dt} &= -\beta NSI + \mu N - \mu NS \\ \frac{d(NI)}{dt} &= \beta NSI - \gamma NI - \mu NI \\ \frac{d(NR)}{dt} &= \gamma NI - \mu NR \\ NS(0) &= NS_0 > 0, \quad NI(0) = NI_0 \geq 0, \\ NR(0) &= NR_0 \geq 0, \\ NS(t) + NI(t) + NR(t) &= N, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

donde la tasa de contacto β , la tasa de eliminación γ y la tasa de mortalidad μ , son constantes positivas.

Si cada ecuación en (5) se divide entre N , entonces el PVI en términos de $S(t)$ e $I(t)$ es:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= -\beta SI + \mu - \mu S \\ \dot{I} &= \beta SI - \gamma I - \mu I \\ S(0) &= S_0 > 0, \quad I(0) = I_0 \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

5. Estimación de parámetros con DIFFPAR

En [3] se describe un software que implementa el algoritmo de Gauss-Newton para estimar parámetros vía mínimo de cuadrados no lineal, que requiere los siguientes datos:

1. El modelo $y = f(t, y, \beta)$.
2. Las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial \beta}$.
3. La tabla \mathbb{T} de datos.
4. La matriz \mathbb{W} de pesos en los datos.
5. El vector de parámetros iniciales β_0 y el vector de condiciones iniciales η_0 .
6. Iterar con o sin parámetros logaritimizados.
7. Tipo de EDO's: **stiff** o **no stiff**.
8. **Factor de tolerancia** para resolver el sistema de EDO's.
9. **Tolerancia para la optimización**.
10. Un número máximo de iteraciones.

6. Ejemplos

6.1. Epidemia de gripe en un internado inglés (1978)

Empleando el modelo (4) y los datos de la tabla 1 obtenidos en [4] en DIFFPAR se obtiene los resultados que se muestran en la figura 4 y la tabla correspondiente.

Día	Infectados reales	Día	Infectados reales
1	3	8	235
2	8	9	190
3	26	10	125
4	75	11	70
5	221	12	28
6	291	13	12
7	255	14	5

Tabla 1: Número real de individuos infectados en 1978.

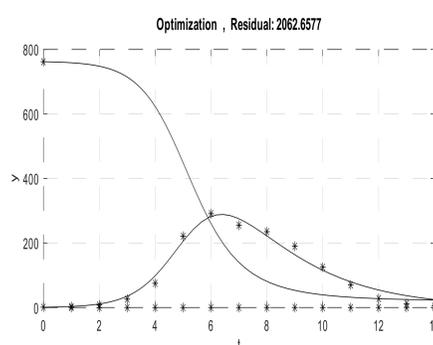


Figura 4: Resultados de la estimación de parámetros generada en DIFFPAR.

Parámetros	β	μ
García P. A.(2014)	0.0022	0.4477
DIFFPAR	0.002182	0.44767

6.2. Peste en Eyam

Empleando de nuevo el modelo (4) y los datos de la tabla 2 obtenidos también en [4] con DIFFPAR, se obtiene ahora los resultados que se muestran en la figura 5 y también en la tabla correspondiente.

Mes (1666)	S	I	R
Junio	269	4	19
Julio	-	-	56
Agosto	-	-	77
Septiembre	-	-	24
Octubre	-	-	14

Tabla 2: Muertes y población de recuperados en EYAM.

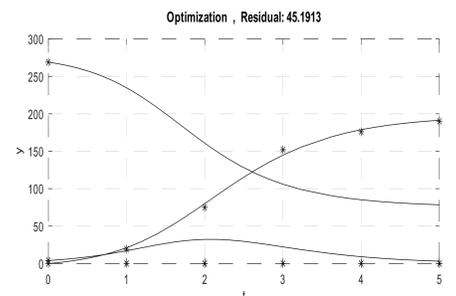


Figura 5: Resultados de la estimación de parámetros generada en DIFFPAR.

Parámetros	β	μ
García P. A.(2014)	0.0145	2.2522
DIFFPAR	0.014492	2.2523

6.3. Viruela Abakaliki

Empleando otra vez el modelo (4) y los datos de la tabla 3 obtenidos también en [4] con DIFFPAR, se obtiene ahora los resultados que se muestran en la figura 6 y en la tabla correspondiente.

Día	Nuevos Infectados reales	Día	Nuevos Infectados
0	1	50	12
13	2	51	12
20	3	55	13
22	4	56	13
25	4	57	13
26	5	58	13
30	6	60	13
36	7	61	13
38	8	66	13
40	9	71	13
42	9	76	11
47	11		

Tabla 3: Número real de nuevos individuos que contraen la viruela en Abakaliki.

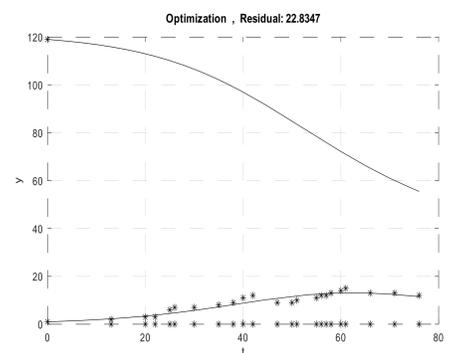


Figura 6: Resultados de la estimación de parámetros generada en DIFFPAR.

Parámetros	β	μ
García P. A.(2014)	0.0013	0.0903
DIFFPAR	0.0012994	0.090291

Referencias

- [1] Anonymous. (1978). Influenza in a boarding school. *British Medical Journal*, Vol. 1, pag 587. [http://www.math.unm.edu/~sulsky/mathcamp/Anon Inluenza-BoardingSchool](http://www.math.unm.edu/~sulsky/mathcamp/Anon%20Influenza-BoardingSchool).
- [2] Brauer et al. (1945). *Mathematical Epidemiology. Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin.
- [3] Edsberg, L. and Wedin, P.-Å. (1995): Numerical Tools for Parameter Estimation in ODE-Systems, *Optimization Methods and Software* 6, pp. 193–217.
- [4] García-Piñera, A. (2014): *Modelos de ecuaciones diferenciales para la propagación de enfermedades infecciosas*, Tesis, Universidad de Cantabria.
- [5] Hethcote, H.W.(1989). Three Basic Epidemiological Models. In: Levin, S.A., Hallam, T.G., Gross L.J.(eds) *Applied Mathematical Ecology. Biomathematics*, vol 18. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-613117-3_5.
- [6] Informe Organización Mundial de la Salud <http://apps.who.int/iris/bitstream/10665/67462/1/WHO>
- [7] Wood W. (1842). *The History and Antiquities of Eyam*. Miller. Consultado online en <https://archive.org/details/historyandantiq00woodgoog>