Método de líneas para una ecuación parabólica

Andry Alexander Peregrino Rodríguez[1]
Justino Alavez Ramírez[2]
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
[1]andry18peregrino8@gmail.com
[2]justino.alavez@ujat.mx

Resumen

El método de líneas es un método muy popular para resolver ecuaciones diferenciales parciales lineales y no lineales de tipo parabólico. Este método conduce a la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias stiff. En este cartel se aplica el método de líneas para resolver un problema de ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico, y los métodos de Euler, Euler hacia atrás y trapezoidal para resolver el sistema stiff que resulta.

1. Planteamiento del problema

El objetivo es estudiar la resolución numérica del problema definido por la ecuación diferencial parcial parabólica:

$$U_t(x,t) = U_{xx} + G(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \tag{1.1}$$
$$U(0,t) = d_0(t), \quad U(1,t) = d_1(t), \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$
$$U(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{1.3}$$

donde U es una función desconocida que depende del tiempo t y de la variable espacial x, y $U_t = \partial U/\partial t$, $U_{xx} = \partial^2 U/\partial x^2$. Las condiciones (1.2) se llaman **condiciones de frontera** y (1.3) se llama **condición inicial**. La solución U se puede interpretar como la temperatura de una varilla aislada de longitud 1 con $U(x,t)$ la temperatura en la posición x al tiempo t; por lo que (1.1) se le llama **ecuación de calor**. Las funciones G, d_0, d_1 y f se suponen conocidas y con suficiente suavidad.

2. Método de líneas

Sea $m > 0$ un número entero, $\delta = 1/m$ y definamos los nodos espaciales

$$x_j = j\delta, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

Discretizamos (1.1) aproximando la derivada espacial U_{xx} con la fórmula de diferencia central de segundo orden:

$$U_{xx}(x_j,t) = \frac{U(x_{j+1},t) - 2U(x_j,t) + U(x_{j-1},t)}{\delta^2} - \frac{\delta^2}{12}\frac{\partial^4 U(\xi_j,t)}{\partial x^4} \tag{2.1}$$

para $j = 1, 2, \ldots, m-1$, donde cada $\xi_j \equiv \xi_j(t)$ es algún punto entre x_{j-1} y x_{j+1}. Sustituyendo (2.1) en (1.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} U_t(x_j,t) = {} & \frac{U(x_{j+1},t) - 2U(x_j,t) + U(x_{j-1},t)}{\delta^2} \\ & + G(x_j,t) - \frac{\delta^2}{12}\frac{\partial^4 U(\xi_j,t)}{\partial x^4}, \quad 1 \leq j \leq m-1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Eliminando el último término de (2.2) que es el error de truncamiento en la diferenciación numérica y forzando la igualdad, obtenemos

$$u_j'(t) = \frac{1}{\delta^2}\left[u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)\right] + G(x_j,t) \tag{2.3}$$

para $j = 1, 2, \ldots, m-1$. Las funciones $u_j(t)$ se pretende que sean aproximaciones de $U(x_j,t)$, $1 \leq j \leq m-1$. Este es la aproximación del **método de líneas** a (1.1), y es un sistema de $m-1$ ecuaciones diferenciales ordinarias. Las funciones $u_0(t)$ y $u_m(t)$, que se necesitan en (2.3) para $j = 1$ y $j = m-1$, se obtienen de (1.2):

$$u_0(t) = d_0(t), \quad u_m(t) = d_1(t). \tag{2.4}$$

Y la condición inicial para (2.3) resulta de (1.3):

$$u_j(0) = f(x_j), \quad 1 \leq j \leq m-1. \tag{2.5}$$

El término **método de líneas** viene de la resolución de $U(x,t)$ a lo largo de las líneas (x_j, t), $t \geq 0$, $1 \leq j \leq m-1$ en el plano xt. Bajo supuestos adecuados sobre d_0, d_1, G y f, se puede demostrar que:

$$\max \left|U(x_j,t) - u_j(t)\right| \leq C_T \delta^2, \quad 0 \leq j \leq m, \ 0 \leq t \leq T, \tag{2.6}$$

lo que muestra que la solución $\{u_j\}_{0 \leq j \leq m}$ converge a la solución exacta U cuando $\delta \to 0$.

Para completar el proceso de solución, necesitamos resolver el sistema (2.3). Para ello, es conveniente escribir (2.3) en forma matricial. Pongamos

$$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \ldots, u_{m-1}(t)]^T, \quad \mathbf{u}_0 = [f(x_1), \ldots, f(x_{m-1})]^T,$$

$$\mathbf{g}(t) = \left[\frac{d_0(t)}{\delta^2} + G(x_1,t), G(x_2,t), \ldots, G(x_{m-2},t), \frac{d_1(t)}{\delta^2} + G(x_{m-1},t)\right]^T,$$

$$\Lambda = \frac{1}{\delta^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

La matriz Λ es de orden $m-1$ y **u** y **g** son vectores columna de longitud $m-1$. Utilizando estas matrices, las ecuaciones (2.3) a (2.5) se reescriben como un problema con valor inicial:

$$\mathbf{u}'(t) = \Lambda\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \tag{2.7}$$

Para analizar si la ecuación (2.7) tiene características stiff, necesitamos los valores propios de Λ, que están dados por

$$\lambda_j = -\frac{4}{\delta^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{2m}\right), \quad 1 \leq j \leq m-1. \tag{2.8}$$

Examinando directamente (2.8), notemos que

$$\lambda_{m-1} \leq \lambda_j \leq \lambda_1,$$

con

$$\lambda_{m-1} = -\frac{4}{\delta^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{(m-1)\pi}{2m}\right) \approx -\frac{4}{\delta^2},$$
$$\lambda_1 = -\frac{4}{\delta^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2m}\right) \approx -\pi^2$$

para m grande. Como

$$\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_1} \approx \frac{4}{(\pi\delta)^2}$$

concluimos que (2.7) es stiff si δ es pequeño.

3. Solución de (2.7) por el método de Euler

Aplicando el método de Euler a (2.7), resulta el método:

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n + h[\Lambda\mathbf{V}_n + \mathbf{g}(t_n)], \quad n \geq 0, \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{u}_0 \tag{3.1}$$

con $t_n = nh$, para algún $h > 0$ y $\mathbf{V}_n \approx \mathbf{u}(t_n)$. Este es un método numérico bien conocido para la ecuación del calor, que se le llama **método explícito simple**.

Para el análisis de estabilidad del método explícito simple (3.1), se debe cumplir que

$$|1 + h\lambda_j| < 1, \quad 1 \leq j \leq m-1,$$

que es equivalente por (2.8) a

$$0 < \frac{4h}{\delta^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{2m}\right) < 2, \quad 1 \leq j \leq m-1.$$

Esta última desigualdad se cumplirá si $4h/\delta^2 \leq 2$ o bien si

$$h \leq \frac{1}{2}\delta^2. \tag{3.2}$$

Si δ es pequeño, digamos $\delta = 0.01$, entonces el tamaño de paso del tiempo h debe ser muy pequeño para garantizar estabilidad del método.

4. Solución de (2.7) por el método de Euler hacia atrás

Aplicando ahora el método de Euler hacia atrás a la ecuación (2.7), resulta:

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n + h[\Lambda\mathbf{V}_{n+1} + \mathbf{g}(t_{n+1})], \quad n \geq 0, \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{u}_0. \tag{4.1}$$

Este método se denomina **método implícito simple** para resolver la ecuación del calor. Para resolver este problema lineal para $\mathbf{V}_{n+1}$, lo reescribimos como:

$$(I - h\Lambda)\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n + h\mathbf{g}(t_{n+1}), \quad n \geq 0. \tag{4.2}$$

Resolviendo para V_{n+1}, obtenemos

$$\mathbf{V}_{n+1} = (I - h\Lambda)^{-1}[\mathbf{V}_n + h\mathbf{g}(t_{n+1})], \quad n \geq 0.$$

Puesto que todos los valores propios λ_j de Λ son negativos por (2.8), los valores propios de $(I - h\Lambda)^{-1}$ son $1/(1 - h\lambda_j)$, que están todos acotados por 1. Así que el método de Euler implícito simple para resolver este problema es siempre estable; no existe limitación en el tamaño de paso h, a diferencia del caso para el método de Euler explícito simple. El sistema lineal (4.2) es tridiagonal y se resuelve con aproximadamente $5m$ operaciones aritméticas de punto flotante en cada paso del tiempo, sin incluir el costo del lado derecho. El costo para resolver el método de Euler (3.1) es casi lo mismo [2].

5. Solución de (2.7) por el método trapezoidal

Aplicando ahora el método trapezoidal a la ecuación (2.7), resulta el **método implícito**:

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n + \frac{h}{2}[\Lambda\mathbf{V}_n + \mathbf{g}(t_n) + \Lambda\mathbf{V}_{n+1} + \mathbf{g}(t_{n+1})], \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{u}_0,$$

con $n \geq 0$, para resolver la ecuación del calor. Resolviendo este problema para $\mathbf{V}_{n+1}$:

$$\left(I - \frac{h}{2}\Lambda\right)\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n + \frac{h}{2}\left[\Lambda\mathbf{V}_n + \mathbf{g}(t_n) + \mathbf{g}(t_{n+1})\right], \tag{5.1}$$

de donde,

$$\mathbf{V}_{n+1} = \left(I - \frac{h}{2}\Lambda\right)^{-1}\left\{\mathbf{V}_n + \frac{h}{2}\left[\Lambda\mathbf{V}_n + \mathbf{g}(t_n) + \mathbf{g}(t_{n+1})\right]\right\}.$$

Como en el caso del método implícito simple, los valores propios de $(I - \frac{h}{2}\Lambda)^{-1}$ son $1/(1 - \frac{h}{2}\lambda_j)$, que también están acotados por 1. Así, el método trapezoidal para resolver este problema es estable, tampoco existe limitación en el tamaño de paso h. A diferencia de los métodos explícito simple e implícito simple que son de orden 1, el método trapezoidal implícito es de orden 2.

6. Ejemplo numérico

Resolver el problema de la ecuación diferencial parcial (1.1)-(1.3) con las funciones G, d_0, d_1 y f, determinadas a partir de la solución conocida:

$$U(x,t) = \exp\left(\frac{1}{t+1}\right)\cos(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \ t \geq 0.$$

Solución. Los resultados con el método de Euler (3.1) se dan en la tabla 1, con el método de Euler hacia atrás (4.2) en la tabla 2 y con el método trapezoidal (5.1) en la tabla 3. En los tres métodos se consideró $m = 4, 8, 16, 32$. Para mantener estabilidad en el método de Euler, se tomó $h = \frac{1}{2}\delta^2$ como lo exige (3.2). Así, $h = 3.1250 \times 10^{-2}, 7.8125 \times 10^{-3}, 1.9531 \times 10^{-3}, 4.8828 \times 10^{-4}$. De (2.6) se sigue que el error en el método de Euler es proporcional a δ^2, y como $h = \frac{1}{2}\delta^2$, se espera que el error debe decrecer por un factor de 4 cuando m se duplica, lo que se observa en la tabla 1. En las tablas, la columna "Error" denota el máximo error que ocurre en los nodos (x_j,t), $0 \leq j \leq m$, para un valor dado de t.

Para la solución de (2.7) por los métodos de Euler hacia atrás y trapezoidal, ya no hay dependencia entre el tamaño de paso espacial δ y el tamaño de paso del tiempo h, por lo que es posible usar un valor relativamente grande de h en estos dos métodos. En las tablas 2 y 3, estamos usando $h = 0.05$ y $m = 4, 8, 16, 32$. Este paso del tiempo h es mucho mayor que el utilizado en la tabla 1 para el método de Euler y, por lo tanto, los métodos de Euler hacia atrás y trapezoidal son mucho más eficientes para este ejemplo.

Tabla 1: *Solución de* (2.7) *por el método de Euler* $(h = \frac{1}{2}\delta^2)$.

t	Error $m=4$	Factor	Error $m=8$	Factor	Error $m=16$	Factor	Error $m=32$
1	1.8067×10^{-2}	4.10	4.4083×10^{-3}	4.02	1.0955×10^{-3}	3.94	2.7790×10^{-4}
2	1.5339×10^{-2}	4.10	3.7445×10^{-3}	4.02	9.3062×10^{-4}	3.94	2.3611×10^{-4}
3	1.4114×10^{-2}	4.10	3.4461×10^{-3}	4.02	8.5649×10^{-4}	3.94	2.1732×10^{-4}
4	1.3424×10^{-2}	4.10	3.2778×10^{-3}	4.02	8.1469×10^{-4}	3.94	2.0671×10^{-4}
5	1.2982×10^{-2}	4.10	3.1700×10^{-3}	4.02	7.8791×10^{-4}	3.94	1.9992×10^{-4}

Tabla 2: *Solución de* (2.7) *por el método de Euler hacia atrás* $(h = 0.05)$.

t	Error $m=4$	Error $m=8$	Error $m=16$	Error $m=32$
1	1.8574×10^{-2}	4.7534×10^{-3}	1.4023×10^{-3}	5.7984×10^{-4}
2	1.5454×10^{-2}	3.8227×10^{-3}	1.0001×10^{-3}	3.0451×10^{-4}
3	1.4157×10^{-2}	3.4749×10^{-3}	8.8212×10^{-4}	2.4255×10^{-4}
4	1.3444×10^{-2}	3.2914×10^{-3}	8.2679×10^{-4}	2.1863×10^{-4}
5	1.2993×10^{-2}	3.1775×10^{-3}	7.9455×10^{-4}	2.0646×10^{-4}

Tabla 3: *Solución de* (2.7) *por el método trapezoidal* $(h = 0.05)$.

t	Error $m=4$	Error $m=8$	Error $m=16$	Error $m=32$
1	1.8250×10^{-2}	4.4489×10^{-3}	1.1018×10^{-3}	2.7618×10^{-4}
2	1.5382×10^{-2}	3.7542×10^{-3}	9.3252×10^{-4}	2.3609×10^{-4}
3	1.4130×10^{-2}	3.4498×10^{-3}	8.5728×10^{-4}	2.1738×10^{-4}
4	1.3431×10^{-2}	3.2796×10^{-3}	8.1507×10^{-4}	2.0676×10^{-4}
5	1.2986×10^{-2}	3.1710×10^{-3}	7.8813×10^{-4}	1.9995×10^{-4}

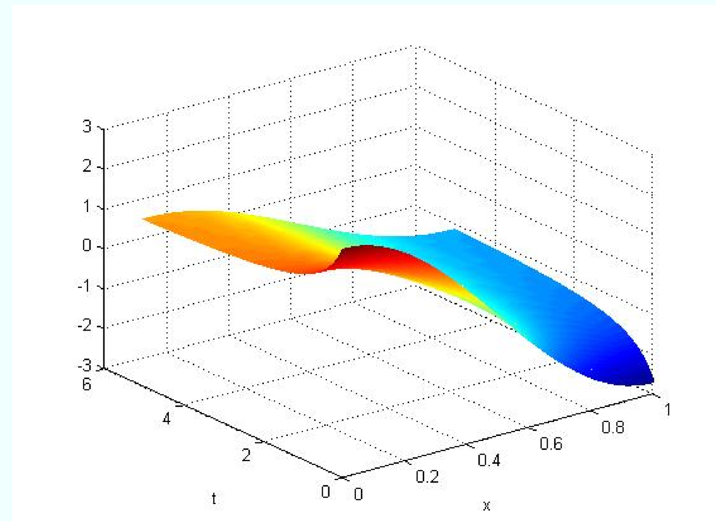

Figura 1: *Solución numérica u con $m = 32$ y $h = 0.001$.*

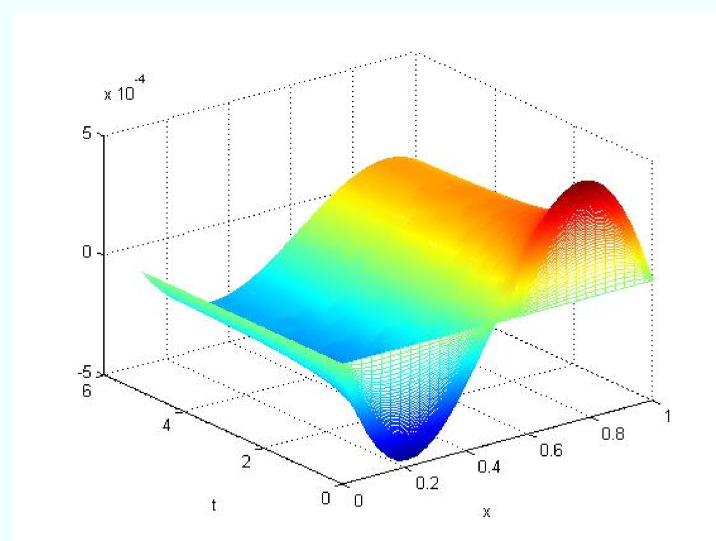

Figura 2: *Error en la solución numérica u con $m = 32$ y $h = 0.001$.*

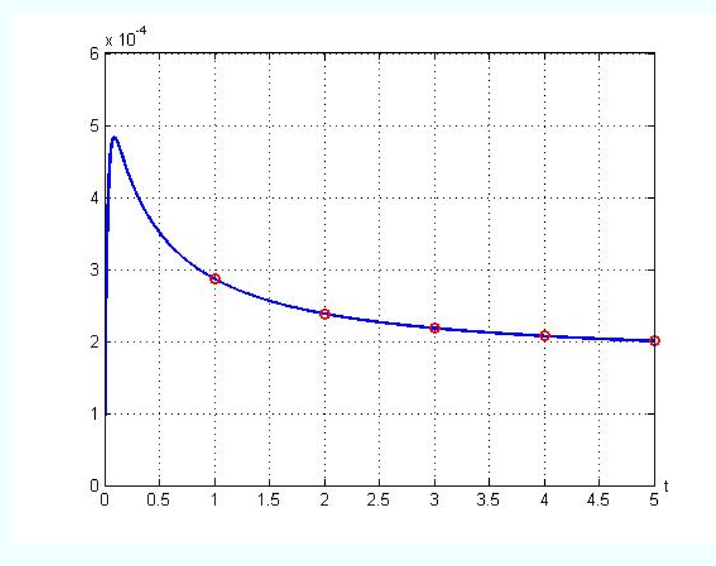

Figura 3: *Error máximo para x en $[0,1]$ como función de t.*

Este trabajo está basado principalmente en el libro de Atkinson, Han y Stewart (2009) [2].

Referencias

[1] Aiken, R. (1985). *Stiff Computation*, Oxford: Oxford University Press.

[2] Atkinson, K., Han, W., Stewart, D. (2009). *Numerical Solution of Differential Equations*. New Jersey: Jhon Wiley.

[3] Schiesser, W. (1991). *The Numerical Method of Lines*, San Diego: Academic Press.