

# Análisis de un modelo para el Problema de Colapso de Colmenas con influencia de un pesticida

Erika Rivero Esquivel, Lourdes Esteva Peralta, Jesús López Estrada

Facultad de Ciencias, UNAM



## Introducción

- ▶ Durante siglos, la humanidad ha reconocido la importancia de las abejas como los principales polinizadores en el mundo.
- ▶ Se estima que 75 % de la producción de frutos y semillas de cultivos alimenticios depende de insectos, siendo las abejas las principales representantes.
- ▶ La industria de miel de abeja alcanzó, en 2014, los 4000 millones de dólares. Hasta ese año, México ocupaba el 8o lugar en producción.



## El colapso de colmenas

- ▶ En el invierno del 2006 se registró un 32 % de mortalidad en las colonias de abejas de Estados Unidos, lo cual siguió en 2007 y 2008. Estos números fueron alarmantes.
- ▶ Actualmente, las abejas están en riesgo por factores como el calentamiento global, la deforestación, el uso de pesticidas para la agricultura, entre otras cosas.
- ▶ El **problema de colapso de colonias** (*Colony Collapse Disorder*) es el decaimiento masivo de las abejas que viven en una colonia.

## Objetivo

Presentar un modelo con cinco compartimentos que describa la dinámica dentro de una colonia de abejas bajo el efecto de un pesticida.

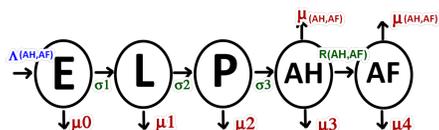
## Variables y parámetros

Sea  $N(t)$  la población total de abejas dentro de una colmena en el tiempo  $t > 0$ . Esta se divide en: huevos ( $E(t)$ ), larvas ( $L(t)$ ), pupas ( $P(t)$ ), abejas interiores ( $A_H(t)$ ) y abejas foráneas ( $A_F(t)$ ).

parametro	significado	unidad
$\mu_0$	muerte per cápita de huevos	días <sup>-1</sup>
$\mu_1$	muerte per cápita de larvas	días <sup>-1</sup>
$\mu_2$	muerte per cápita de pupas	días <sup>-1</sup>
$1/\sigma_1$	periodo de incubación de huevos	días
$1/\sigma_2$	tiempo de maduración de larvas	días
$1/\sigma_3$	tiempo de maduración de pupas	días
$\Lambda$	tasa de postura de la abeja reina	huevos por día
$\alpha$	tasa de transición máxima de interiores a foráneas	días <sup>-1</sup>
$\sigma$	inhibición social. $\alpha - \sigma \sim 1/21$	días <sup>-1</sup>
$\mu_3$	muerte per cápita de adultas interiores	días <sup>-1</sup>
$\mu_4$	muerte per cápita de adultas foráneas	días <sup>-1</sup>
$\mu$	tasa de exterminación por pesticida	abejas por día

Cuadro: Tabla de parámetros

## El modelo



$$E'(t) = \frac{\Lambda(A_H + A_F)}{\omega + A_H + A_F} - \sigma_1 E - \mu_0 E,$$

$$L'(t) = \sigma_1 E - \sigma_2 L - \mu_1 L,$$

$$P'(t) = \sigma_2 L - \sigma_3 P - \mu_2 P,$$

$$A_H'(t) = \sigma_3 P - \left[ \alpha - \sigma \left( \frac{A_F}{\omega + A_H + A_F} \right) \right] A_H - \frac{\mu}{\omega + A_H + A_F} A_H + \mu(A_H, A_F) - \mu_3 A_H,$$

$$A_F'(t) = \left[ \alpha - \sigma \left( \frac{A_F}{\omega + A_H + A_F} \right) \right] A_H - \frac{\mu}{\omega + A_H + A_F} A_F - \mu_4 A_F.$$

## Estados de equilibrio y estabilidad

Definimos:

$$R_0 = \frac{\Lambda \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 (\alpha \omega + \mu + \mu_4 \omega)}{(\mu_0 + \sigma_1)(\mu_1 + \sigma_2)(\mu_2 + \sigma_3)(\mu + \mu_4 \omega)(\alpha \omega + \mu + \mu_3 \omega)}$$

1. Si  $R_0 < 1$ , el modelo tiene un único estado de equilibrio,  $x_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ , que es localmente asintóticamente estable (LAS). En otras palabras, la colmena tiene riesgo de colapsar.
2. Si  $R_0 > 1$ , el modelo tiene dos equilibrios,  $x_0$  y  $x^*$  (que es positivo).  $x_0$  es inestable y  $x^*$  es LAS para ciertos valores de  $\omega$ . En otras palabras, la colmena no corre el riesgo de colapsar.

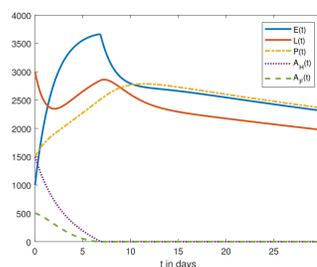


Figura: Estabilidad del equilibrio de extinción cuando  $R_0 < 1$

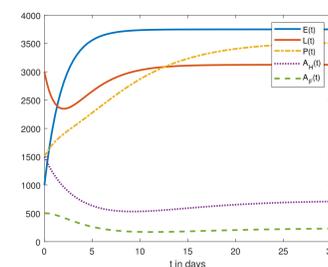


Figura: Estabilidad del equilibrio positivo cuando  $R_0 > 1$

## Sensibilidad

Para los ejemplos se tomaron valores estimados (fijos) de los parámetros, pero si se varían cinco parámetros ( $\Lambda, \mu, \alpha, \mu_3, \mu_4$ ): El parámetro de pesticida,  $\mu$ , tiene correlación más alta con  $R_0$ . En otras palabras, **aumentar la cantidad de pesticida aumenta el riesgo de colapso en la colmena.**

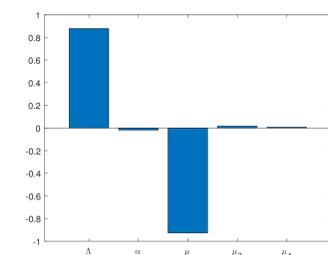


Figura: Coeficiente de correlación parcial de  $R_0$  c.r.a los parámetros  $\Lambda, \mu, \alpha, \mu_3, \mu_4$

## Conclusiones

Nuestro modelo para el CCD:

- ▶ Contempla cinco variables de estado de la evolución de una colmena, a diferencia de otros reportados en la literatura.
- ▶ Describe satisfactoriamente dos escenarios: uno de colapso y otro de supervivencia, que dependen de un solo parámetro umbral,  $R_0$ .
- ▶ Refleja las características del CCD en la literatura: en un escenario de colapso hay abundantes huevos pero pocas abejas adultas (Figura (??)).
- ▶ Refleja las observaciones del apicultor: si la colmena colapsa, lo hace en 20 días aproximadamente (Figura (??)).
- ▶ Muestra que el aumento del pesticida en el ambiente está directamente relacionado con el decaimiento de la colmena.

## Referencias

1. R. D. Booton, Y. Iwasa, J. A. Marshall, D. Z. Childs, Stress-mediated allee effects can cause the sudden collapse of honey bee colonies, *Journal of Theoretical Biology* 420 (2017) 213–219.
2. J. Bryden, R. J. Gill, R. A. Mitton, N. E. Raine, V. A. Jansen, Chronic sublethal stress causes bee colony failure, *Ecology letters* 16 (12) (2013) 1463–1469.
3. D. S. Khoury, M. R. Myerscough, A. B. Barron, A quantitative model of honey bee colony population dynamics, *PLoS one* 6 (4) (2011) e18491.
4. C. UNAM-SENASICA, Estudio de algunos de los factores que influyen en la pérdida de colonias de abejas en diferentes estados de importancia apícola de la república mexicana (2018).