



EL MODELO SIR Y SUS APLICACIONES

María Elena Sánchez Valencia^{a,b}

Justino Alavez Ramírez^a

^aUJAT, ^b202A15001@alumno.ujat.mx



1. Introducción

Las enfermedades han sido un reto constante para la ciencia y el modelaje matemático en epidemiología proporciona conocimientos de los principales mecanismos que influyen en la dispersión de una enfermedad y en el proceso del modelado, se sugieren estrategia de control, de hecho, los modelos a menudo identifican comportamientos que no son claros en los datos experimentales, a veces por que los datos no son reproducibles y el número de datos están limitados y sujetos a mejoras en su medición. Por ejemplo, unos de los resultados fundamentales en la matemática epidemiológica es que la mayoría de modelos matemáticos sobre epidemias, incluyendo aquellos que involucran un alto grado de heterogeneidad usualmente exhiben el comportamiento del "umbral" [1], véase figura 1.

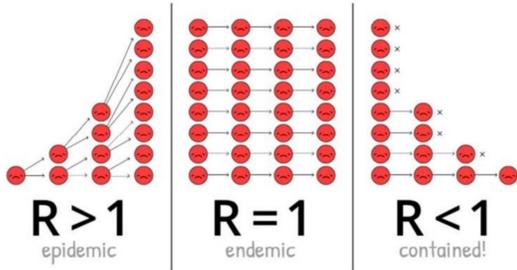


Figura 1: Descripción del umbral R_0 , el cual en términos epidemiológicos puede ser establecido como se sigue: si el número promedio de infecciones secundarias causado por la enfermedad es menor que uno la enfermedad se extinguirá, mientras que si excede de uno habrá una epidemia.

Este tipo de principio, consistente de observaciones y cuantificaciones vía modelos epidemiológicos, ha sido usado para estimar la efectividad de las políticas de vacunación y la probabilidad de que una enfermedad sea eliminada o erradicada.

2. Modelo SIR implementado por Kenmark y McKendrick

Muchos de los primeros desarrollos en el modelaje matemático sobre enfermedades transmisibles son debidos a los médicos de salud pública. El primer resultado conocido en la matemática epidemiológica es una defensa de la práctica de inocular en contra de la viruela hecha en 1760 por Daniel Bernoulli, un miembro de una famosa familia de matemáticos (8 personas en tres generaciones) los cuales tenían entrenamiento de médicos. La primera contribución en la epidemiología matemática moderna es debida a p.d.en'ko entre 1873 y 1894 y los fundamentos con una aproximación total a la epidemiología basada en modelos compartimentados mandada por médicos de la salud pública tales como sir r.a. ross, w.h. hamer, a.g. mckendrick, y w.o. Como en todo modelo matemático de algún fenómeno natural, se requiere incluir en él condiciones que representen, a grandes rasgos, los mecanismos involucrados.

El problema se puede resumir de la siguiente manera: *Una (o más) personas infectadas se introducen en una comunidad de individuos, más o menos susceptible a la enfermedad en cuestión. La enfermedad se propaga desde el afectado al no afectado por la infección de contacto. Cada persona infectada permanece durante el curso de su enfermedad, y finalmente es eliminado del número de los que están enfermos, por recuperación o por muerte. Las posibilidades de recuperación o muerte, varían de un día a otro durante el curso de su enfermedad. Las posibilidades de que los afectados pueden transmitir la infección a los no afectados también dependen de la etapa de la enfermedad. A medida que se propaga la epidemia, el número de personas no afectadas de los miembros de la comunidad se reducen. Como el curso de una epidemia es corta en comparación con la vida de un individuo, la población se considera que permanece constante, excepto en la medida en que se modifique por las muertes debidas a la propia enfermedad epidémica. Con el transcurso del tiempo, la epidemia puede llegar a un final.*

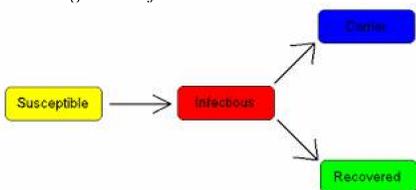


Figura 2: Flujo de contagios en una pandemia.

El modelo básico SIR (Susceptibles-Infectados-Recuperados) de Kenmark y McKendrick es un modelo de compartimentos donde la población bajo estudio se divide en clases epidemiológicas y se describe un flujo entre ellas, como se muestra en la figura 3.



Figura 3: Esquema de un modelo de compartimentos divididos por clases epidemiológicas.

Susceptibles $S(t)$: individuos sanos que pueden ser contagiados por los infectados.

Infectados $I(t)$: individuos portadores de la enfermedad.

Recuperados $R(t)$: individuos que se han recuperado de la enfermedad.

El modelo SIR de Kenmark y McKendrick asume que la población total N se mantiene constante en el tiempo, o sea, es la suma de los susceptibles más los infectados más los recuperados:

$$N = S(t) + I(t) + R(t).$$

La transmisión es por contacto directo. Para transmitir la infección, un infeccioso hace contacto con βN individuos por unidad de tiempo. La probabilidad de contacto entre un infeccioso y un susceptible es S/N , luego el número de nuevas infecciones por unidad de tiempo es $(\beta N)(S/N)I = \beta SI$. Es decir, un infeccioso transmite la enfermedad con una tasa de contagio β , según la ley de acción de masas. Esto significa que los cambios en la población susceptible también se comportan según la ley de acción de masas. Por otra parte, una fracción μ de infectados por unidad de tiempo deja esa clase para convertirse en recuperados con inmunidad permanente. Esto conduce al sistema de ecuaciones diferenciales del modelo SIR:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \mu I(t), \end{aligned}$$

donde:

β : nos indica el número de contactos suficientes para la transmisión de una persona por unidad de tiempo. Es decir, el parámetro β es el producto del número de contactos medios por individuo y unidad de tiempo y la probabilidad de contagio en un solo contacto entre un individuo infectado y un individuo susceptible.

μ : nos indica la tasa por unidad de tiempo a la cual los individuos infectados se recuperan. Es decir, es la razón entre el número de recuperados y el número de infectados por unidad de tiempo. El periodo medio de latencia se calcula como la inversa de la tasa de recuperación, es decir, $L = 1/\mu$.

3. Aplicaciones

3.1. Epidemia de gripe en un internado inglés, 1978

En el año 1978 se informó a la conocida revista British Medical Journal [andrea] de un brote de gripe en un internado del norte de Inglaterra que se extendió del 22 de enero al 4 de febrero, infectando a 512 de las 763 personas que estudiaban allí [3]. En la Tabla 1 aparecen los datos del número de personas enfermas cada día. Se sabe además que la epidemia comenzó con un infectado. Número real de individuos infectados en 1978 y predicción de individuos infectados según el modelo mejorado. En este caso concreto la población permanece constante por lo que nos encontramos en un escenario ideal para aplicar el modelo SIR [2].

Día	Infectados reales	Infectados según el modelo
1	3	3.4069
2	8	11.4446
3	26	36.7168
4	75	102.8879
5	221	212.4616
6	291	286.3817
7	255	274.5569
8	235	219.1892
9	190	160.6006
10	125	112.9203
11	70	77.7214
12	28	52.8653
13	12	35.7095
14	5	24.0190

Tabla 1: Número real de individuos infectados en 1978 y predicción de individuos infectados según el modelo SIR.

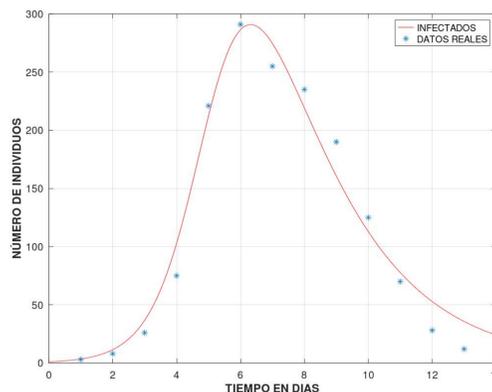


Figura 4: Simulación de la evolución de individuos infectados en el internado inglés y datos reales.

3.2. Eyam, la aldea de la peste

Eyam, la aldea de la peste, es un pequeño pueblo situado en Derbyshire, Inglaterra, conocido porque la peste acabó con la mayoría de sus habitantes a mediados del siglo XVII. La enfermedad llegó al pueblo en septiembre de 1665 en un fardo de ropa infectado por pulgas que un sastre del pueblo había traído de Inglaterra. Las primeras víctimas contrajeron la enfermedad por contacto directo de la ropa infectada con la piel. Después de una semana ya se produjeron las primeras muertes, entre ellas la del sastre. En octubre de 1665 murieron 23 personas. A partir de ahí empezaron a disminuir las muertes mes a mes

hasta mayo de 1666 que acabó solo con 4 fallecimientos. Sorprendentemente, con la llegada del verano la peste atacó con más fuerza, dejando unos datos desoladores que podemos ver en la Tabla 2.

Mes (1666)	Muertes	Individuos recuperados ($R(t)$)
Junio	19	21
Julio	56	80
Agosto	77	145
Septiembre	24	179
Octubre	14	192

Tabla 2: Muertes y población de recuperados en EYAM [6].

El reverendo del pueblo, William Mompesson, decidió tomar medidas ante esta epidemia destructiva. La medida más acertada fue poner en cuarentena al pueblo para intentar prevenir el contagio en los pueblos cercanos. Después de 16 meses la peste acabó con la vida de más de 260 de los 350 habitantes que había inicialmente [6].

En la figura 5 se muestra la predicción de recuperados obtenidas en la simulación del modelo SIR en OCTAVE.

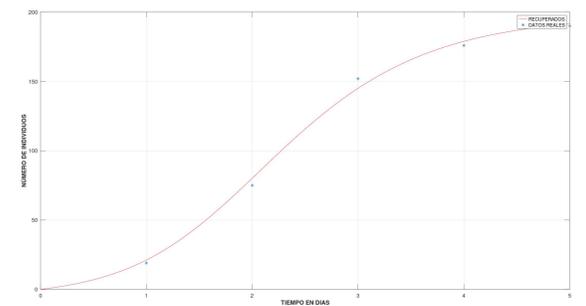


Figura 5: Simulación de la evolución de individuos recuperados en la aldea de Eyam y datos reales.

3.3. Viruela en Abakaliki, Nigeria.

La aparición de un brote de viruela en 1967 en Abakaliki, una pequeña aldea aislada en el sureste de Nigeria. Los habitantes de esa aldea pertenecían a un grupo religioso que estaba en contra de la vacunación. En dos meses y medio aproximadamente, 30 de los 120 habitantes fueron infectados. Se recopilaron los siguientes datos que se muestran en la Tabla 3:

Día	Nuevos Infectados reales	Día	Nuevos Infectados
0	1	50	12
13	2	51	12
20	3	55	13
22	4	56	13
25	4	57	13
26	5	58	13
30	6	60	13
36	7	61	13
38	8	66	13
40	9	71	13
42	9	76	11
47	11		

Tabla 3: Número real de nuevos individuos que contraen la viruela en Abakaliki.

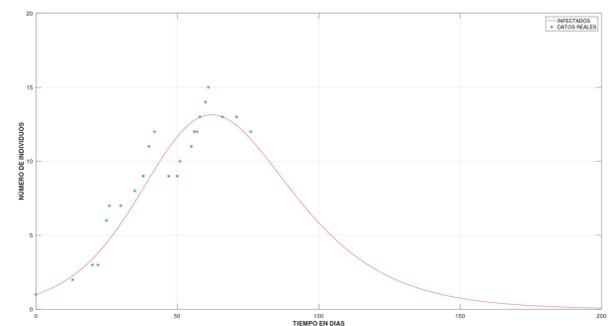


Figura 6: Simulación de la evolución de los individuos infectados en Abakaliki y datos reales.

Debido a que los individuos infectados por viruela en la aldea fueron aislados para evitar nuevas infecciones a partir del caso 11, de ahí que la simulación no es tan buena como en los otros ejemplos, ya que el aislamiento no entra dentro de las hipótesis del modelo SIR ([4] pag. 399 y [5]).

Referencias

- [1] Kermack, W.O. and McKendrick, A.G. (1927). *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*. Proc. Royal Soc. of London, series A, 115(772):700-721.
- [2] Weiss, H. (2013). *The SIR model and the Foundation of Public Health*. Materials Mathematics, 3:1-17.
- [3] Anonymous, (1978). Influenza in a boarding school. *British Medical Journal*, Vol. 1, pag 587. <http://www.math.unm.edu/~sulsky/mathcamp/AnonInfluenzaBoardingSchool>.
- [4] Brauer et al. (1945). *Mathematical Epidemiology. Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin.
- [5] Informe Organización Mundial de la Salud <http://apps.who.int/iris/bitstream/10665/67462/1/WHO>
- [6] Wood W. (1842). *The History and Antiquities of Eyam*. Miller. Consultado online en <https://archive.org/details/historyandantiqu00woodgoog>