

Covid-19 en México: Modelos de crecimiento limitado y tasas de infección como función del tiempo

José A. Mendoza G., Louis Breton T. & Jesús López E.
Facultad de Ciencias, UNAM

ENOAN 2021



Modelos simples para el estudio de la pandemia

Preguntas relevantes de la pandemia

Un modelo simple no tiene porque no ser útil, cuando permite responder preguntas importantes:

- ¿Cuál será el valor del pico de la pandemia?
- ¿Cuándo ocurrirá el pico de la pandemia?
- ¿Cuál será el número de infectados durante toda la pandemia?
- ¿Cuánto durará la pandemia?

Los casos acumulados de COVID-19 en la CDMX y el Edo. de México utilizados son datos oficiales tomados de la página web <https://datos.covid-19.conacyt.mx/>

Objetivo: Uso de modelos básicos de crecimiento de poblaciones con crecimiento limitado para responder estas preguntas.



Publicado por Pierre François Verhulst en 1838 (Braun [1]):

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \beta I \left(1 - \frac{I}{K}\right) \\ I(0) = I_0 \end{cases}$$

- I representa el número de individuos de una población al tiempo t .
- $\beta > 0$ es la tasa de crecimiento per cápita de la población.
- $K > 0$ población de saturación ó capacidad de carga que soporta un medio finito con recursos limitados.

y cuya solución viene dada por:

$$I(t) = \frac{K I_0 \exp(\beta t)}{K + I_0 (\exp(\beta t) - 1)}$$



Se publicó en 1825 y está dado por la ecuación (Braun [1]):

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \beta I \ln\left(\frac{K}{I}\right) \\ I(0) = I_0 \end{cases}$$

- I representa el número de individuos de una población al tiempo t .
- $\beta > 0$ es la tasa de crecimiento de la población.
- $K > 0$ es la población de saturación ó capacidad de carga que soporta un medio finito con recursos limitados.

y cuya solución está dada por:

$$I(t) = K \exp\left(-\ln\left(\frac{K}{I_0}\right) e^{-\beta t}\right)$$

Estimación de parámetros tasa constante y tasa variable

Funcional Objetivo: tasa constante

Sea $p \in \mathbb{R}^M$, $y_0 \in \mathbb{R}^N$ y $y(\cdot; p, y_0) \in C^1([0, T], \mathbb{R}^N)$ solución de:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = F(y, p) & (0, T) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Supongamos que tenemos un conjunto de datos $\{t_i, D_i\}$, $i = 1, K$, y que

$$y(t_i; p, y_0) = D_i + \epsilon_i$$

Funcional de mínimos cuadrados

Si los errores de observación ϵ_i son v.a.i.d. con distribución normal $N(0, \sigma^2)$, entonces se busca minimizar el funcional:

$$J(p, y_0) = \sum_{i=1}^K \|y(t_i; p, y_0) - D_i\|^2$$

Funcional Poisson

$$J(p, y_0) = \sum_{i=1}^K \left[(y(t_i; p, y_0) - D_i) + D_i \ln\left(\frac{D_i}{y(t_i; p, y_0)}\right) \right]$$

Funcional Objetivo: tasa variable

Para el caso de tasa variable se estiman los coeficientes de una interpolación de Hermite.

Sea $\{t_i\}_{i=1}^L$ una partición del intervalo $[0, T]$. Dado $\beta \in \mathbb{R}^L$, se define la función: $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por la interpolación de Hermite para β sobre la partición $\{t_i\}_{i=1}^L$.

Y considérense los sistemas:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \beta(t; \beta) I \left(1 - \frac{I}{K}\right) \\ I(0) = I_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dI}{dt} = \beta(t; \beta) I \ln\left(\frac{K}{I}\right) \\ I(0) = I_0 \end{cases}$$

en el intervalo $(0, T)$. Así en este caso el problema se reduce a estimar L parámetros constantes en una EDO. Se definen los siguientes funcionales:

1) De mínimos cuadrados

$$J(\hat{\beta}, k, y_0) = \sum_{i=1}^K \|I(t_i; \hat{\beta}, k, y_0) - D_i\|^2$$

2) De Poisson

$$J(\hat{\beta}, k, y_0) = \sum_{i=1}^n \left[(I(t_i; \hat{\beta}, k, y_0) - D_i) + D_i \ln\left(\frac{D_i}{I(t_i; \hat{\beta}, k, y_0)}\right) \right]$$

Un proceso de optimización

Para minimizar el funcional, se utiliza el siguiente procedimiento:

1. Se define a $\Theta = \prod_{i=1}^L [L_i, U_i]$, y se presupone que el vector de parámetros buscado \hat{p} cumple con:

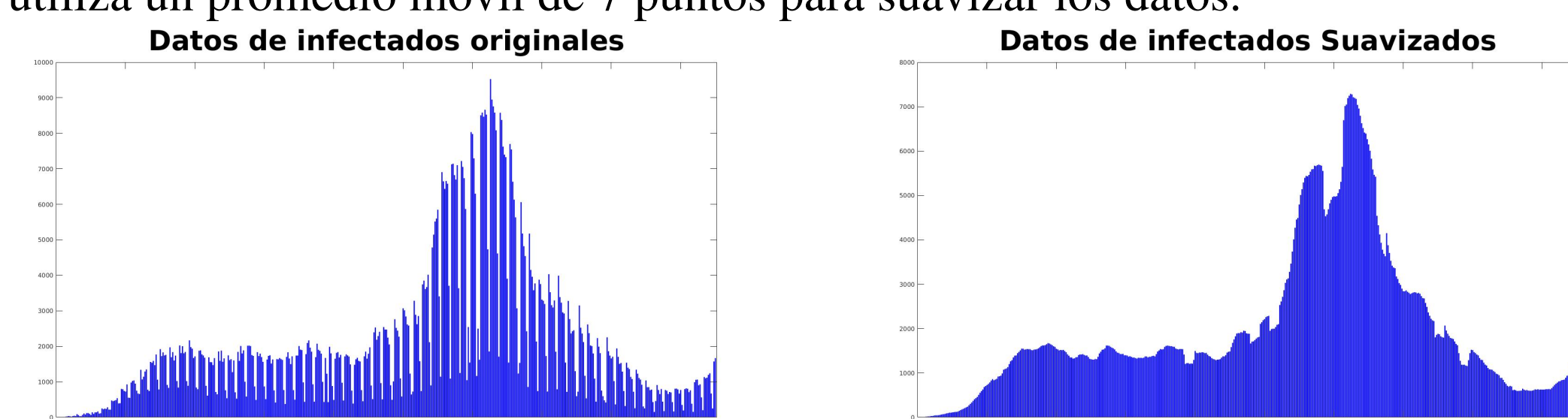
$$L_i \leq \hat{p}_i \leq U_i$$

donde $\Theta = [0, 10^7] \times [0, 150] \times [0, 150] \times [0, 1] \times [0, 1]$

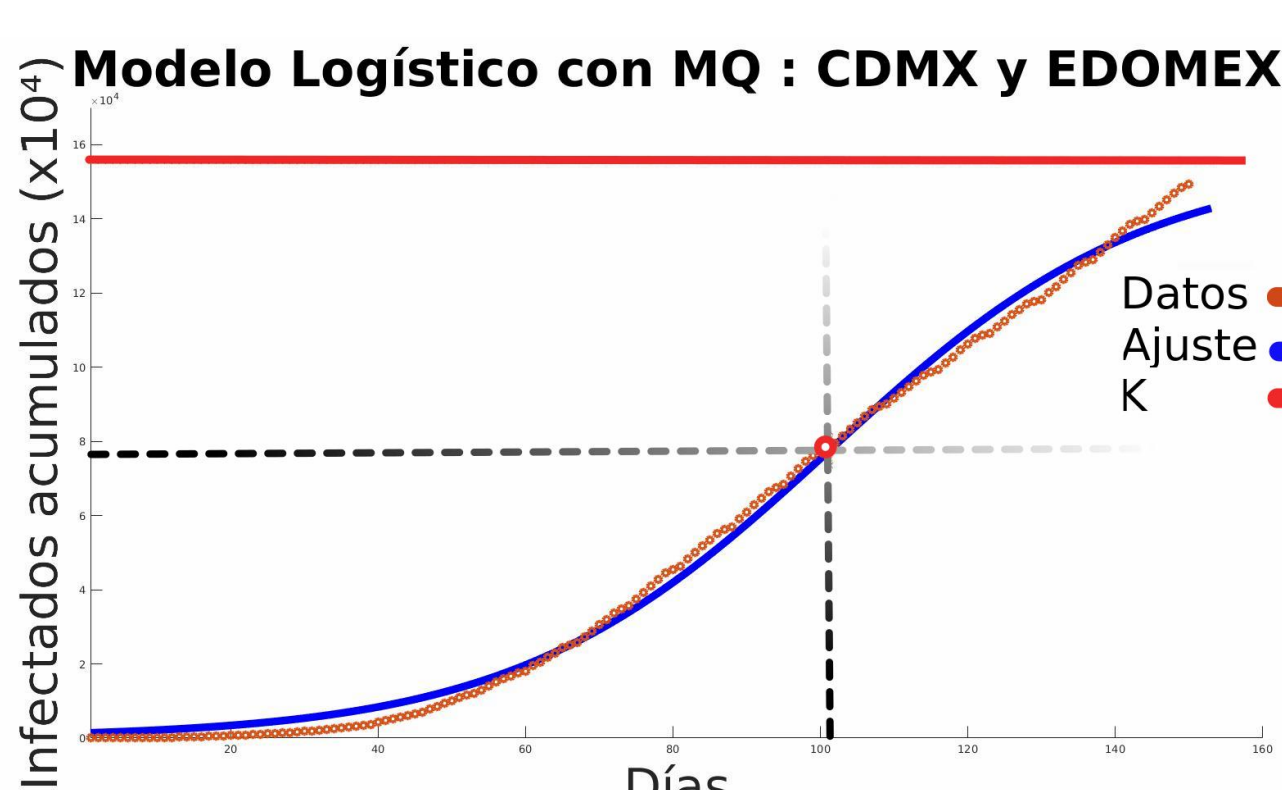
2. Dado un punto inicial $p_0 \in \Theta$ se aplica el algoritmo simplex de Nelder-Mead (Kelley [2]) para la minimización del funcional (3.2).
3. Se utiliza el algoritmo Levenberg-Marquardt (Moré [3]) con el resultado del algoritmo Simplex como parámetros iniciales.

Suavizamiento de datos

Se utiliza un promedio móvil de 7 puntos para suavizar los datos.

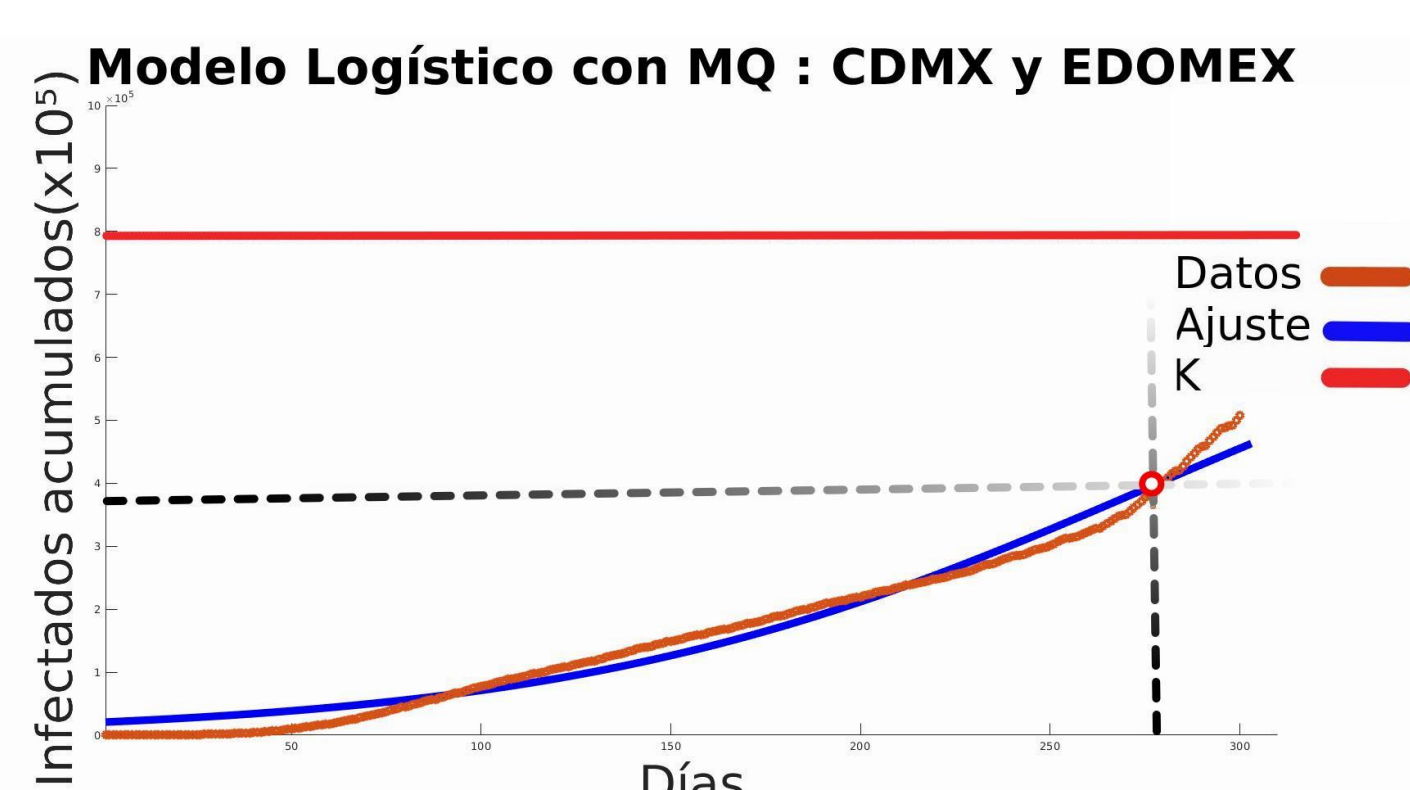


5 Meses



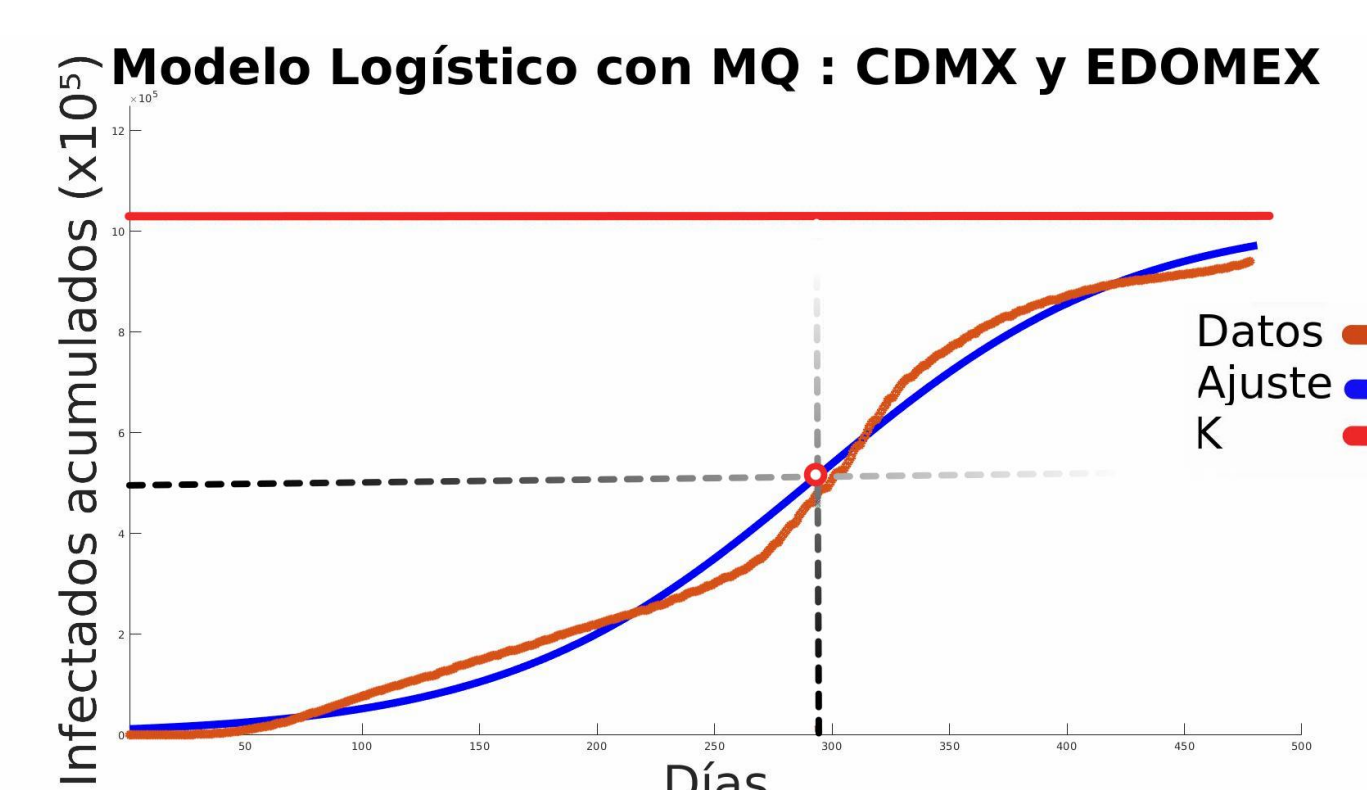
Parámetros	Logístico	Gompertz
Tasa de infección	$\beta = 0.0467$	$\beta = 0.0220$
Impacto	$K = 155,660$	$K = 201,280$
Casos de inicio	$\eta = 14$	$\eta = 31$
Incidencia máxima	$I_{max} = 77,828$	$I_{max} = 74,048$
Tiempo de I_{max}	$t_{1/2} = 101$	$t_{1/2} = 99$

Resultados Numéricos 10 Meses



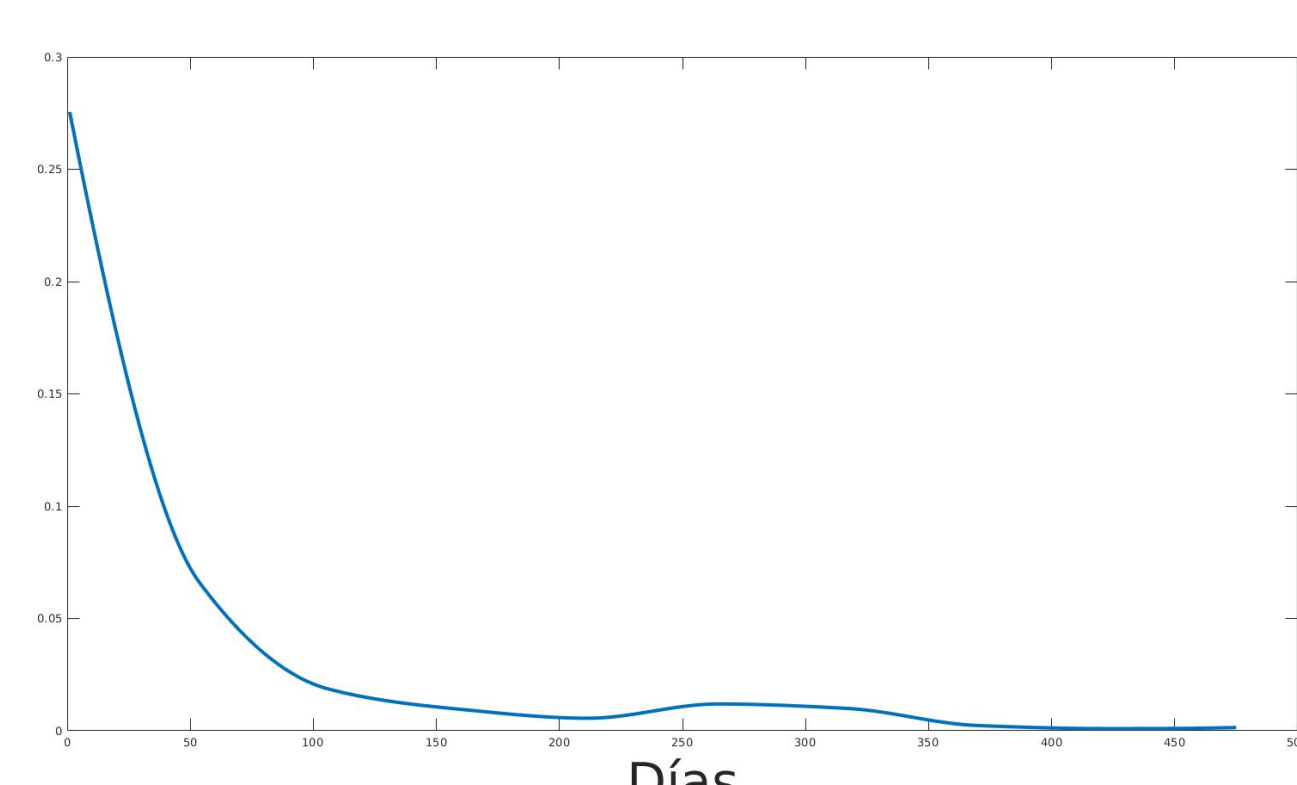
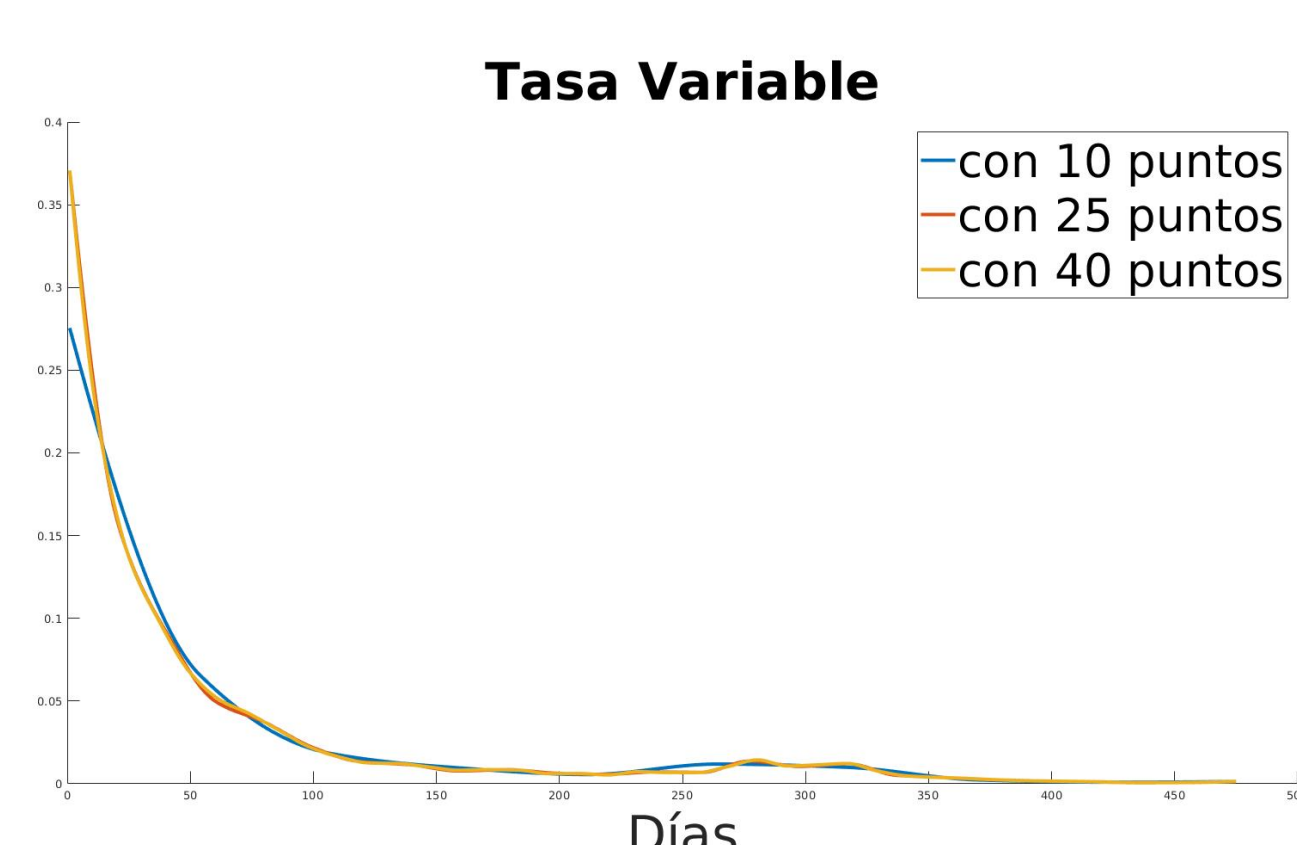
Parámetros	Logístico	Gompertz
Tasa de infección	$\beta = 0.0131$	$\beta = 0.0045$
Impacto	$K = 793,500$	$K = 1,680,200$
Casos de inicio	$\eta = 20,586$	$\eta = 11,528$
Incidencia máxima	$I_{max} = 396,750$	$I_{max} = 618,130$
Tiempo de I_{max}	$t_{1/2} = 277$	$t_{1/2} = 361$

15 Meses



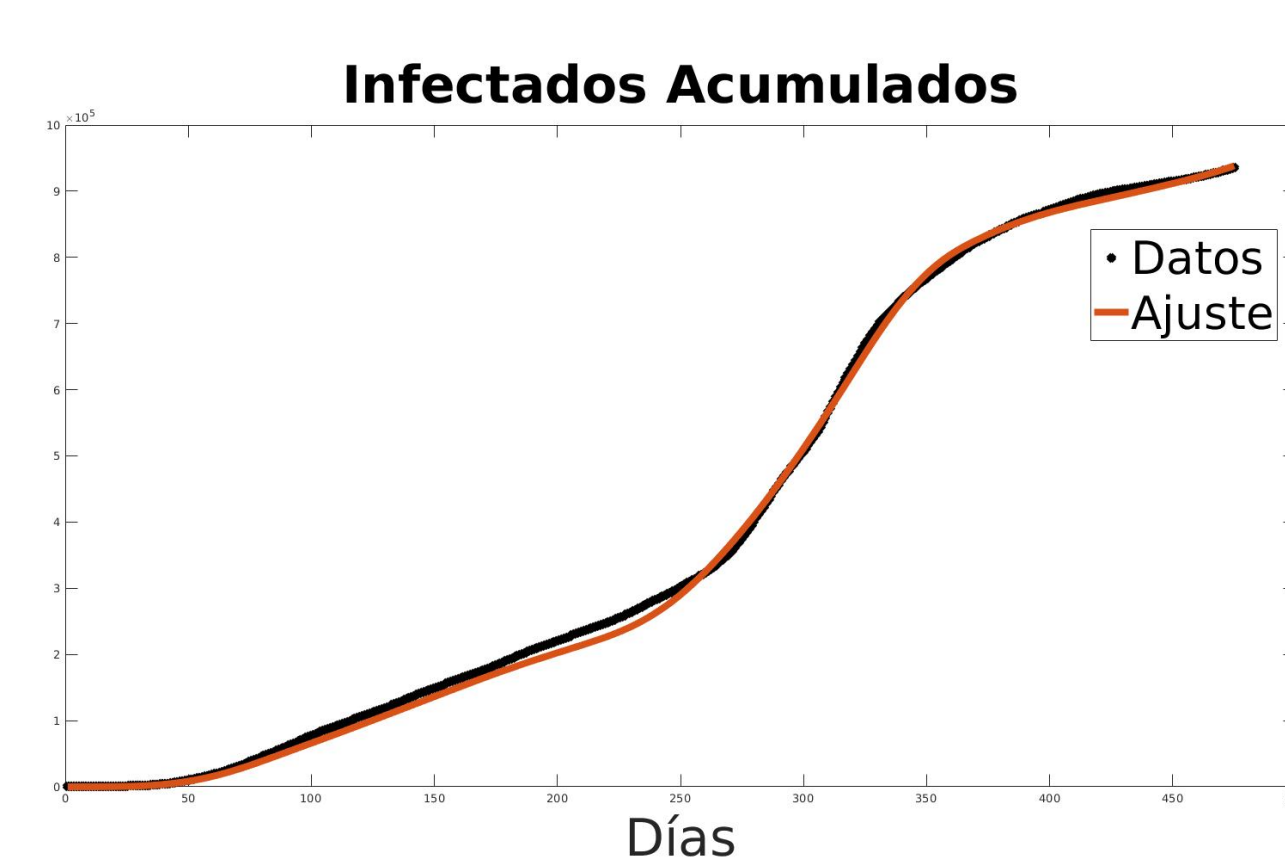
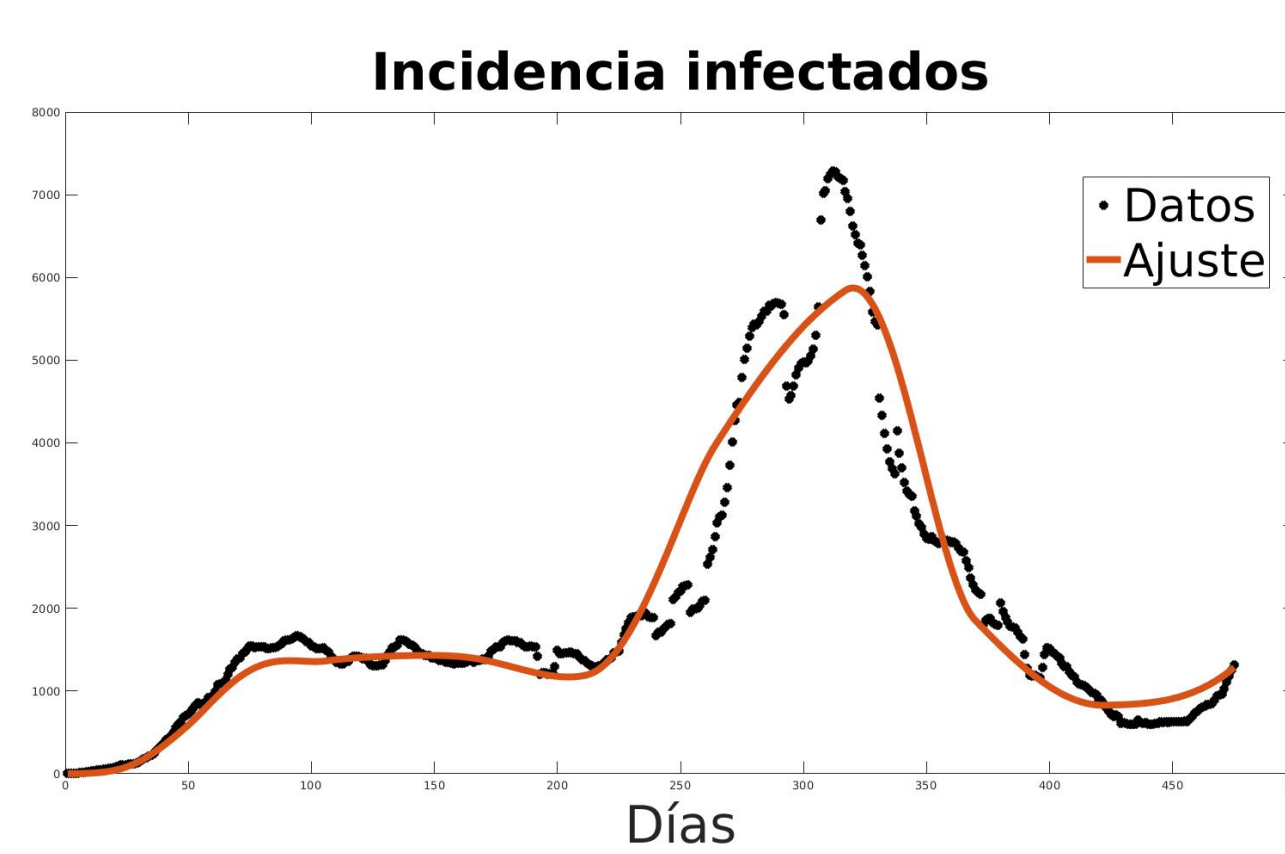
Parámetros	Logístico	Gompertz
Tasa de infección	$\beta = 0.0151$	$\beta = 0.0069$
Impacto	$K = 1,030,300$	$K = 1,310,600$
Casos de inicio	$\eta = 1,215$	$\eta = 1,189$
Incidencia máxima	$I_{max} = 515,160$	$I_{max} = 482,150$
Tiempo de I_{max}	$t_{1/2} = 294$	$t_{1/2} = 283$

Tasa variable por interpolación de Hermite



Resultados Numéricos Tasa variable

Resultados Numéricos



Discusión

- No se puede hacer una estimación realista de los parámetros en los primeros días de la epidemia.
- En el caso de esta pandemia de COVID-19 se observa que a partir del mes 10 los resultados estimados se acercan más al escenario real.
- Los resultados de los dos modelos son relativamente similares.
- Para el modelo de tasa de infección variable, se puede observar el comportamiento de la tasa de infección a lo largo del tiempo lo que permite estudiar relaciones entre la aplicación de medidas de contención y el comportamiento en la tasa de infección.

References

- [1] Braun, M., *Differential Equations And Their Applications*, Springer, 4th Edition, 1993.
- [2] Kelley, C.T., *Iterative Methods for Optimization*, SIAM, 1999.
- [3] Moré, J.J., *The Levenberg-Marquardt algorithm: Implementation and Theory*, en Watson, G.A. (ed.), *Numerical Analysis*, Proc. Bienial Dundee Conf. 1977, Springer 1978, 105-116.