

# Descomposición de Helmholtz en $\mathbb{R}^2$ utilizando un algoritmo de gradiente conjugado con preconditionador óptimo.

Juan Luis Hernández López<sup>1</sup>, Jorge López-López<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México.

<sup>2</sup>Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Cunduacán, Tabasco, México.

Agosto, 2021

## Introducción

Varios problemas y aplicaciones requieren un conocimiento profundo de un campo vectorial en una región. Una herramienta importante en este contexto es el teorema de descomposición de Helmholtz (TDH) que garantiza, bajo ciertas hipótesis, una descomposición única de un campo vectorial  $\mathbf{u}$  definido en un dominio  $\Omega$  en sus componentes solenoidal  $\mathbf{u}_s$  e irrotacional  $\mathbf{u}_p$ . Esto es,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_p, \text{ en } \Omega.$$

Esta descomposición es importante, por ejemplo, porque las propiedades como la incompresibilidad y la vorticidad se pueden estudiar directamente mediante el estudio de estas componentes. El problema que estamos considerando en este trabajo es la descomposición numérica, en un dominio Lipschitz  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , acotado, con frontera  $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D$ , de un campo vectorial  $\mathbf{u}$  en sus componentes solenoidal e irrotacional, esto es, queremos resolver numéricamente el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_p \text{ en } \Omega, & (1) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_s &= 0 \text{ en } \Omega, & (2) \\ \mathbf{u}_p &= \nabla p \text{ en } \Omega, & (3) \\ \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sobre } \Gamma_N, & (4) \end{aligned}$$

donde  $p$  es un potencial escalar,  $\mathbf{n}$  es el vector exterior unitario, normal a la frontera  $\Gamma$ ,  $\Gamma_N$  es una sección de  $\Gamma$  donde el campo vectorial solenoidal es tangente a la frontera y  $\Gamma_D = \Gamma - \Gamma_N$ . Aplicamos una metodología basada en la solución de problemas de punto silla para encontrar simultáneamente el par  $(\mathbf{u}_s, p)$  utilizando un algoritmo de gradiente conjugado preconditionado óptimo combinado con un método mixto de elementos finitos para resolver problemas elípticos.

## Formulación matemática para la descomposición Helmholtz

Para encontrar la descomposición de Helmholtz, consideramos un campo vectorial  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$ , donde

$$\mathbf{H}(\text{div}; \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{v} \in L_2(\Omega)\}.$$

Si se cumple (1)-(4), la pareja  $(\mathbf{u}_s, p) \in \mathbf{V}_N \times L_2(\Omega)$ , satisface

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{v} \, dx = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx, & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N, \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u}_s \, dx = 0, & \forall q \in L_2(\Omega). \end{cases} \quad (5)$$

donde  $\mathbf{V}_N = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_N\}$ .

## Formulación operacional

Seguindo a [2], el problema de punto silla (5), se transforma en la ecuación operacional

$$A p = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (6)$$

donde  $A : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$  es el operador definido por,  $A \mu = \nabla \cdot \mathbf{u}_\mu$ , con  $\mathbf{u}_\mu$  la solución de

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\mu \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega), \\ \int_{\Omega} \mathbf{u}_\mu \cdot \mathbf{v} \, dx = - \int_{\Omega} \mu \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx, & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N. \end{cases} \quad (7)$$

Se resuelve la ecuación (6) usando un algoritmo de gradiente conjugado con preconditionador óptimo (GCP), que opera en  $L_2(\Omega)$ . El preconditionador óptimo utilizado es  $B^{-1} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ , definido por  $B q = \phi_q$ , donde  $\phi_q$  es solución del problema

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla \phi_q \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} q \psi \, dx, & \forall \psi \in H_D^1(\Omega), \\ \phi_q = 0 & \text{sobre } \Gamma_D, \\ \nabla \phi_q \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_N, \end{cases} \quad (8)$$

con  $H_D^1(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega) : \psi = 0 \text{ sobre } \Gamma_D\}$ .

El algoritmo hace uso de una aproximación de elementos finitos mixtos de segundo orden para aproximar las funciones pertenecientes a los espacios  $\mathbf{V}_N$  y  $L_2(\Omega)$ . La solución es el campo  $\mathbf{u}_s$  y el potencial escalar  $p$ .

## Inicio

1. Dado  $p^0 \in L_2(\Omega)$ , resolver

$$\begin{cases} \mathbf{u}_p^0 \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega), \\ \int_{\Omega} (\mathbf{u}_p^0) \cdot \mathbf{v} \, dx = - \int_{\Omega} p^0 \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx, & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N. \end{cases}$$

2. Sea  $g^0 = -\nabla \cdot \mathbf{u}^0$ , donde  $\mathbf{u}^0 = -(\mathbf{u}_p^0 - \mathbf{u})$ .

3. Resolver

$$\begin{cases} \phi^0 \in H_D^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} (\nabla \phi^0) \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} g^0 \psi \, dx, & \forall \psi \in H_D^1(\Omega). \end{cases}$$

4. Sea  $\hat{g}^0 = \phi^0$ ,  $d^0 = -\hat{g}^0$ .

## Descenso

Para  $m \geq 0$ , si  $p^m, g^m, \hat{g}^m, d^m, \mathbf{u}^m$  se conocen, calcular  $p^{m+1}, g^{m+1}, \hat{g}^{m+1}, d^{m+1}$  y  $\mathbf{u}^{m+1}$ , usando los siguientes pasos

5. Resolver

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}^m \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega), \\ \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{u}}^m) \cdot \mathbf{v} \, dx = - \int_{\Omega} d^m \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx, & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N. \end{cases}$$

6. Sea  $\tilde{g}^m = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^m$ .

7. Sea  $\alpha_m = \int_{\Omega} g^m \tilde{g}^m \, dx / \int_{\Omega} \tilde{g}^m d^m \, dx$ .

8. Resolver

$$\begin{cases} \tilde{\phi}^m \in H_D^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} (\nabla \tilde{\phi}^m) \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} \tilde{g}^m \psi \, dx, & \forall \psi \in H_D^1(\Omega). \end{cases}$$

9. Tomar

$$\begin{aligned} p^{m+1} &= p^m + \alpha_m d^m, \\ \mathbf{u}^{m+1} &= \mathbf{u}^m - \alpha_m \tilde{\mathbf{u}}^m, \\ g^{m+1} &= g^m + \alpha_m \tilde{g}^m, \\ \hat{g}^{m+1} &= \hat{g}^m + \alpha_m \tilde{\phi}^m. \end{aligned}$$

**Prueba de convergencia y nueva dirección de descenso**

Si  $\int_{\Omega} g^{m+1} \hat{g}^{m+1} \, dx / \int_{\Omega} \hat{g}^{m+1} d^m \, dx < \epsilon$ , entonces hacer  $p = p^{m+1}$ ,  $\mathbf{u}_s = \mathbf{u}^{m+1}$  y parar. De lo contrario, hacer lo siguiente:

10. Calcular  $\beta_m = \int_{\Omega} g^{m+1} \hat{g}^{m+1} \, dx / \int_{\Omega} g^m \hat{g}^m \, dx$

11. Tomar  $d^{m+1} = -\hat{g}^{m+1} + \beta_m d^m$ .

12. Hacer  $m = m + 1$  y regresar a 5.

## Resultados numéricos

Consideramos un campo vectorial en 2-D,

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{u}_s(x, y) + \mathbf{u}_p(x, y), \quad \Omega = (-1, 1) \times (-1, 1),$$

cuyas componentes solenoidal e irrotacional son,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s(x, y) &= (-\sin(\pi x) \cos(\pi y), \cos(\pi x) \sin(\pi y)), \\ \mathbf{u}_p(x, y) &= (\pi \cos(\pi(x+y)), \pi \cos(\pi(x+y))) = \nabla(\sin(\pi(x+y))). \end{aligned}$$

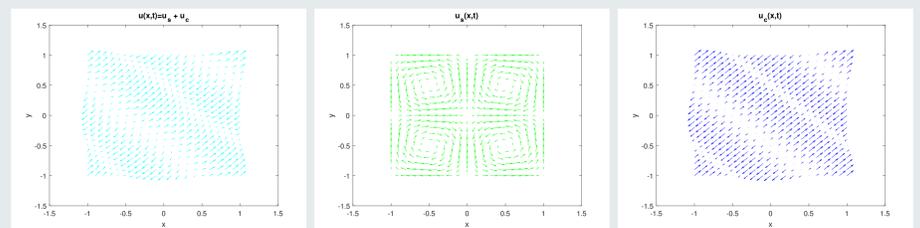


Figura 1: Campos vectoriales exactos

En la siguiente tabla se muestran los resultados numéricos de las aproximaciones para la componente solenoidal y el potencial escalar  $p$  aplicando el algoritmo GCP y el algoritmo de gradiente conjugado sin preconditionador (GC), donde se calculan el error relativo  $e_{sr}$  de la componente solenoidal, la norma  $L^2$  de la divergencia  $ndiv$  de la componente solenoidal, así como el número de iteraciones para conseguir la convergencia, cuya tolerancia fue de ( $\epsilon = 10^{-4}$ ), para varios tamaños de malla.

tamaño de malla	algoritmo GC			algoritmo GCP		
	$e_{sr}$	$ndiv$	iters.	$e_{sr}$	$ndiv$	iters.
33x33	3.84E-2	1.65E-3	9	6.87E-2	4.55E-3	4
65x65	1.65E-2	3.25E-4	18	8.50E-2	3.03E-3	3
129x129	1.18E-2	1.22E-4	34	5.99E-2	1.08E-3	3
257x257	7.57E-3	3.38E-5	67	8.90E-2	6.89E-4	2

En la Figura 2, mostramos las líneas de corriente para el campo vectorial solenoidal exacto (izquierda) y aproximado (derecha).

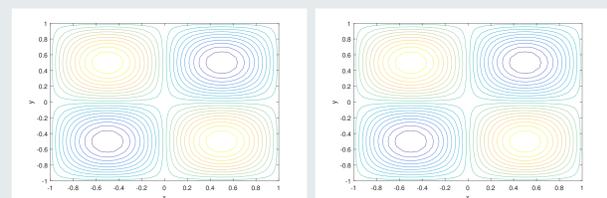


Figura 2: líneas de corriente para el campo vectorial solenoidal exacto y aproximado en una malla de velocidad de 65x65 (una malla gruesa de 33x33)

En la Figura 3, mostramos el potencial escalar  $p$  exacto (izquierda) y aproximado (derecha).

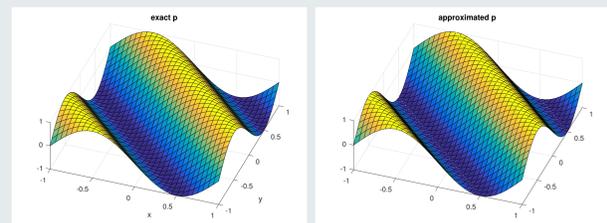


Figura 3: Potencial escalar  $p$  exacto y aproximado, en una malla gruesa de 33x33 (una malla de velocidad de 65x65)

## Conclusiones

Hemos aplicado un preconditionador óptimo para el algoritmo iterativo de gradiente conjugado, para resolver la ecuación del operador asociada a la formulación del punto de silla del problema de descomposición de Helmholtz. Los resultados numéricos muestran que el nuevo algoritmo de gradiente conjugado preconditionado, y su aproximación estable por medio de una discretización de elementos finitos mixtos, conservan las buenas propiedades del algoritmo de gradiente conjugado no preconditionado, pero es mucho más rápido y produce mejores resultados. No es necesario imponer condiciones de contorno en el multiplicador, como se hace con los enfoques elípticos. Además, no es necesario el post-procesamiento del potencial escalar para encontrar el campo vectorial del multiplicador, ya que el multiplicador y el campo vectorial solenoidal son encontrados simultáneamente por el algoritmo.

## Referencias

- H. Bhatia, G. Norgard, V. Pascucci, P. Bremer, The Helmholtz-Hodge Decomposition-A Survey, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 19, 1386-, 2012. DOI: 10.1109/TVCG.2012.316.
- J. López-López, H. Juárez, M. L. Sandoval, Improving the Reconstruction of Vector Fields Using Mixed Finite Element Methods and Optimal Preconditioning, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 32, 1137-1154, 2016.