

La pandemia COVID-19 en México, el modelo SIR con tasa de infección en función del tiempo.



David Franco, Louis Breton & Jesús Lopez Estrada
Facultad de Ciencias, UNAM

ENOAN 2021

Planteamiento del problema

El Covid-19 en México

Es bien sabido que el modelo SIR de Kermack y McKendrick (1927) no puede describir replicas de una pandemia. Luego, el control de la pandemia del Covid-19, en México no tuvo mucho éxito, debido a que se consideró una tasa de infección constante para su estudio. Esto sugiere considerar para el análisis de esta pandemia la propuesta del modelo SIR con una tasa de infección variable $\alpha(t)$ a través del tiempo.

Objetivo: Encontrar la tasa de infección variable $\alpha(t)$ que mejor replique a los datos oficiales reportados.

El modelo SIR con tasa variable

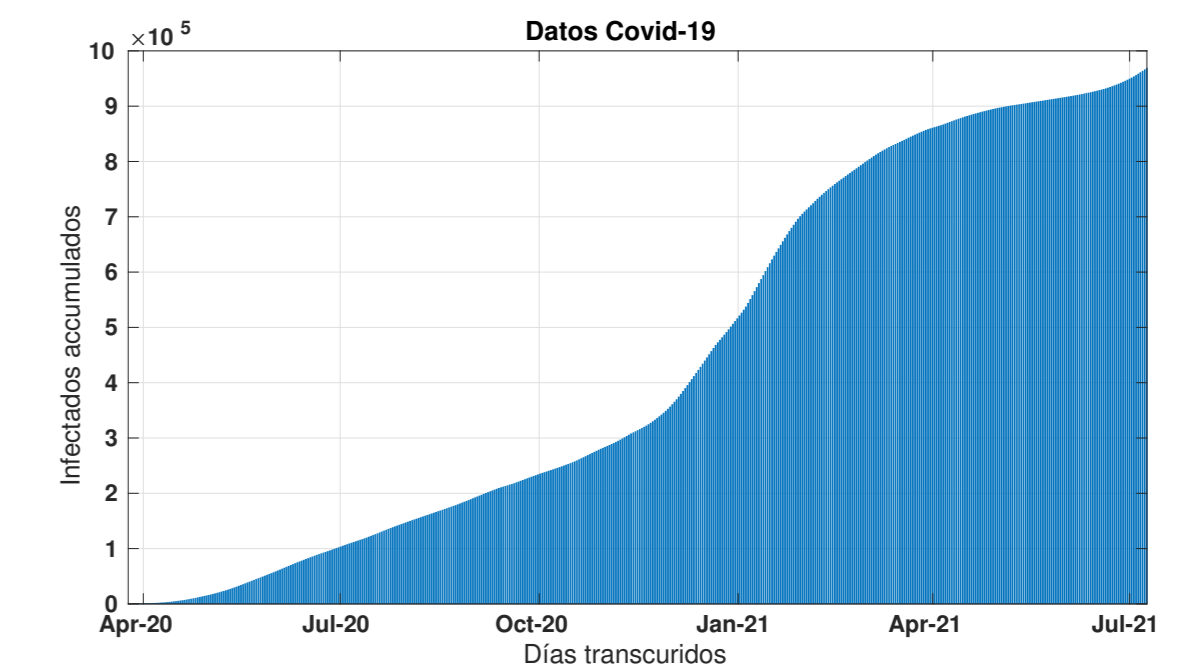
El modelo SIR con tasa variable, esta dado por el siguiente sistema de EDO's:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\alpha(t)SI \\ \dot{I} = \alpha(t)SI - \mu I \\ \dot{R} = \mu I \end{cases}$$

donde, S son los individuos susceptibles, I son los infectados y R los recuperados o fallecidos. Los parámetros $\alpha(t)$ y $1/\mu$ son las tasas de infección per capita y de tiempo de recuperación esperado, respectivamente.

Nuestro objetivo

Dados los datos oficiales:



Se quiere obtener una tasa de infección $\alpha(t)$ variable de manera que el modelo SIR con esta tasa replique a los datos. Y con esa información dar una valoración de la efectividad de las medidas profilácticas tomadas por la autoridades de salud.

Ventajas del modelo SIR con tasa variable

El modelo SIR clásico

• La cantidad de recuperados en un periodo de tiempo Δt , lo suficientemente pequeño, es proporcional a la cantidad de infectados al inicio del periodo, por ende:

$$\frac{dR}{dt} = \mu I$$

• El incremento de infectados en un periodo de tiempo pequeño Δt , se rige por la ley de acción de masa, por lo tanto:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \text{cantidad de recuperados}$$

• La población es considerada constante, por lo que en un periodo de tiempo Δt pequeño:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI$$

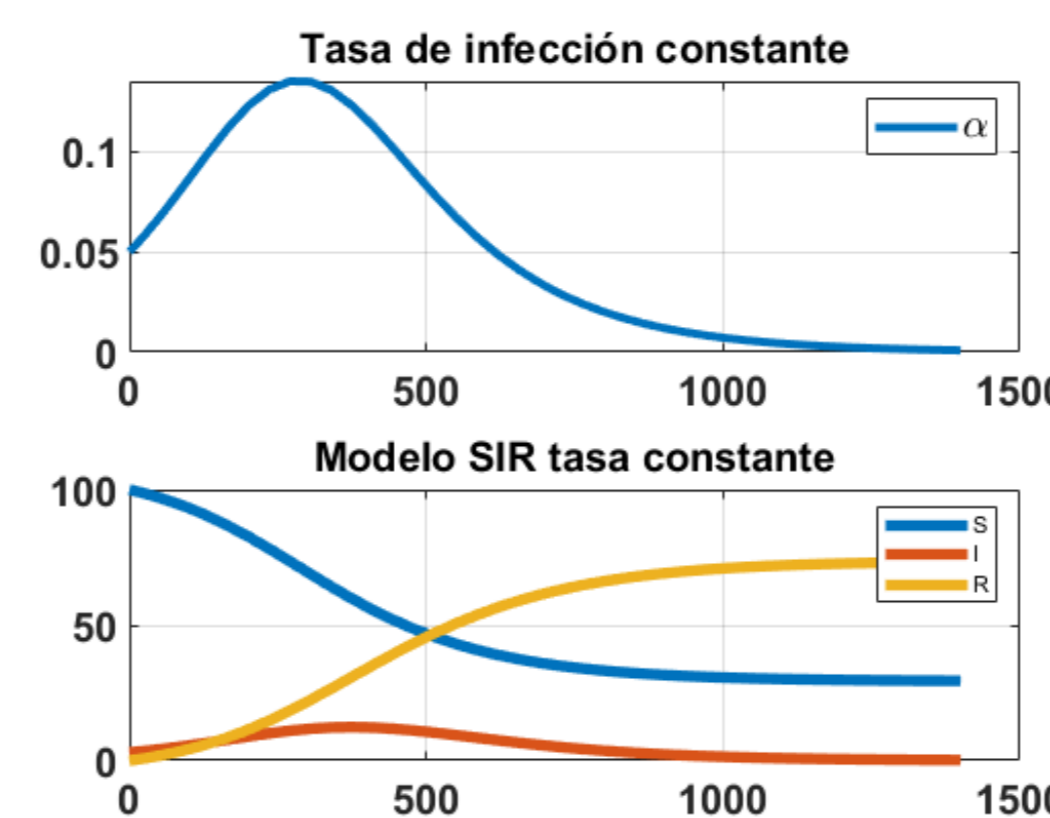
SIR con tasa variable

Suponiendo que las medidas preventivas tomadas modifican la constante de proporcionalidad de la ley de acción de masas:

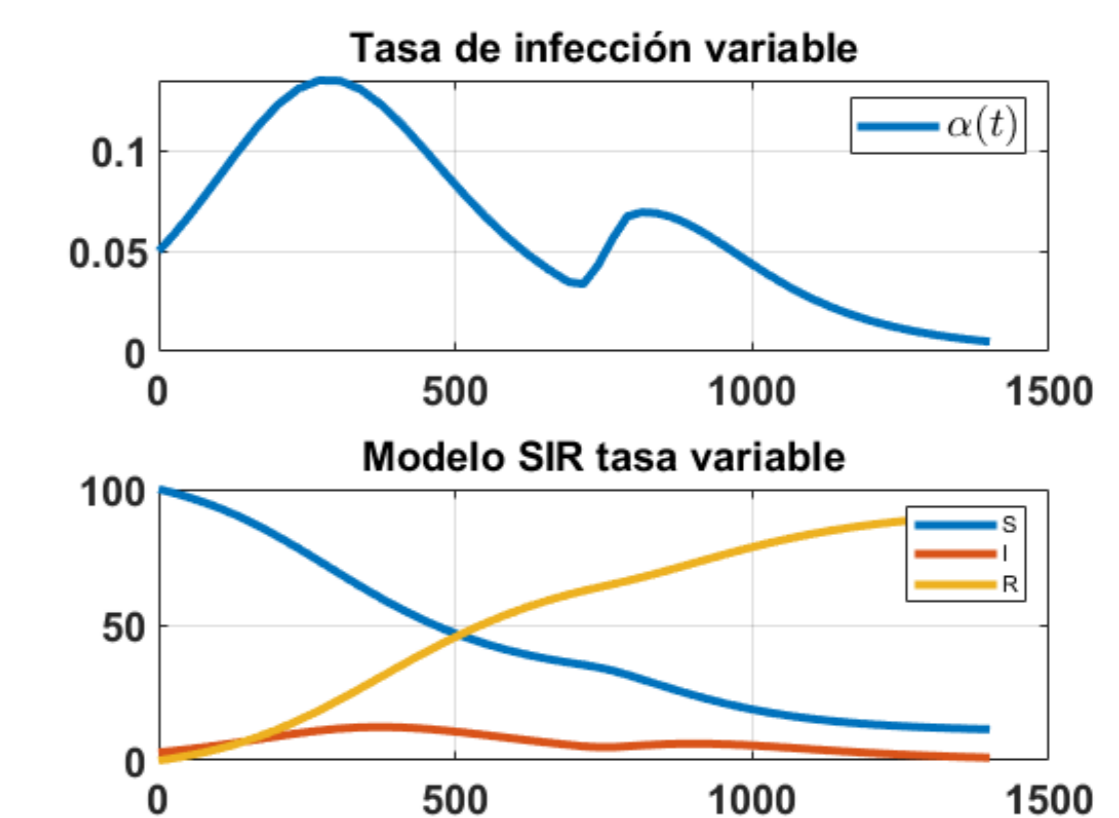
$$\frac{dI}{dt} = \alpha(t)SI - \text{cantidad de recuperados}$$

Este nuevo modelo nos permite evaluar las medidas publicas tomadas para mitigar la propagación del Covid-19. En si, estas deberían verse reflejadas en la tasa de infección variable.

SIR clásico



SIR con tasa variable



Problema de optimización

Dada una trayectoria objetivo $z_d \in H^1(0, T)^M$, se busca un control $\alpha(\cdot) \in L^2(0, T)$ de forma que minimice el siguiente funcional:

$$J(\alpha) = \int_{(0,T)} \|B(y(t; \alpha, y_0)) - z_d(t)\|^2$$

Donde $y(t; \alpha, y_0) \in H^1(0, T)^N$ es solución del siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = F(y, \alpha) & (0, T) \\ y(0) = y_0 & (0, T) \end{cases} \quad (1)$$

y $B: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ es lineal.

Observación: En nuestro problema, el sistema (1) corresponde al modelo SIR. La trayectoria objetivo z_d corresponde a la interpolación de datos suavizados. También se tiene que $B(y)$ son los casos de infectados acumulados es decir $I + R$

El problema inverso y el método gradiente

Calculo del Gradiente: $\nabla_f J_1$

Usando el método de lagrangiano obtenemos que:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}(\alpha) = \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}(y(t; \alpha, y_0), \alpha) \right)^t p(y(t; \alpha, y_0), \alpha)$$

donde $y(t; \alpha, y_0)$ es solución del problema primal es decir::

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = F(y, \alpha) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

y $p(y(t; \alpha, y_0), \alpha)$ es solución del problema dual:

$$\begin{cases} -\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(y, \alpha) \right)^t p + B^t (By - z_d) \\ p(T) = 0 \end{cases}$$

ambos sistemas primal y dual en el intervalo $[0, T]$.

Método de gradiente descendiente

1. Se toma una $\alpha_0(\cdot)$ como función inicial y un pequeño tamaño de paso $s_0 > 0$.
2. Se obtiene el paso óptimo de descenso:

$$s_n = \arg \min_{s \in \mathbb{R}} J(\alpha^n - s \frac{\partial J}{\partial \alpha}(\alpha^n))$$

3. Se calcula α_{n+1}

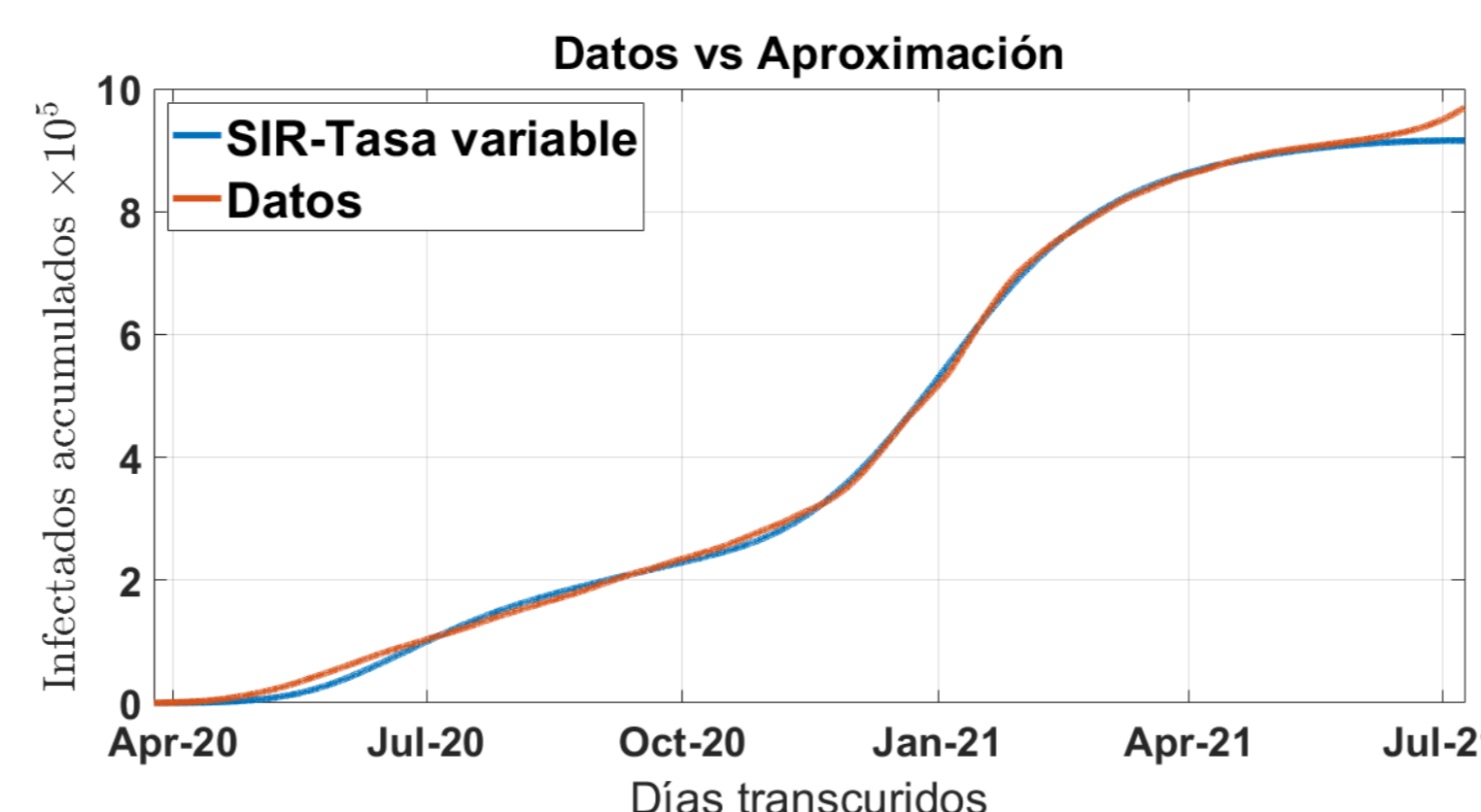
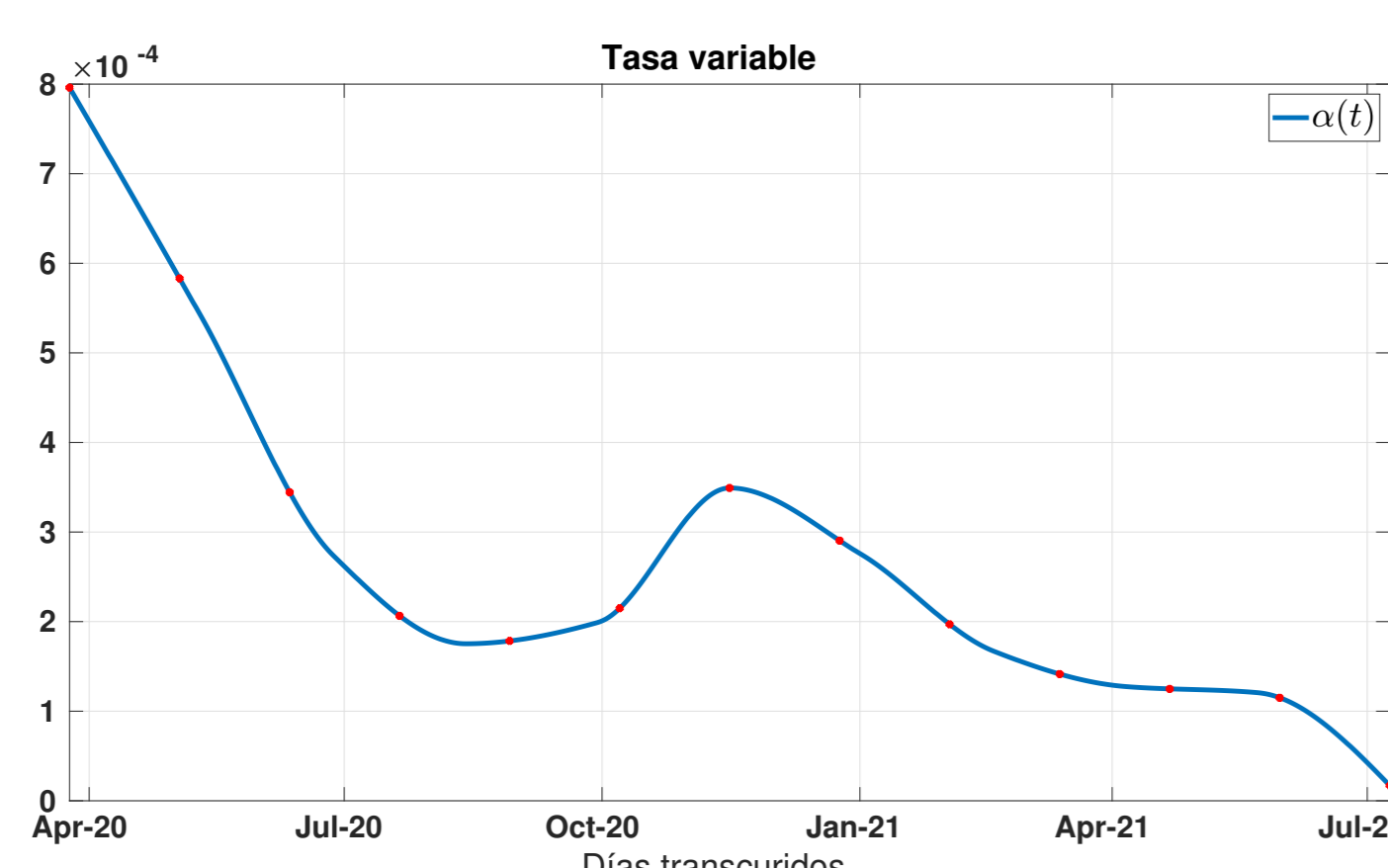
$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - s_n \frac{\partial J}{\partial \alpha}(\alpha^n)$$

4. Se verifica si alguna condición de paro (incluyendo convergencia) se da; si NO, se hace $n = n+1$ y se va al paso 2.

En nuestro caso los criterios de convergencia escogidos fueron:

- **Parar** si $s_n < tol$ donde $tol > 0$ es un número "muy" pequeño (en particular, se eligió 10^{-10}).
- **Parar** si $\|\frac{\partial J}{\partial \alpha}(\alpha_n)\| < \epsilon$ donde $\epsilon > 0$ es un número "muy" pequeño (en nuestro caso 10^{-5}).

Resultados e interpretaciones



Observación: Nótese que el segundo brote se dió entre finales de octubre 2020 y principios de enero 2021, además, la tasa de infección en este segundo brote tuvo su máximo entre el 15 y 20 de enero aproximadamente, es decir cuando más contagios existían. Después de estas fechas vuelve a decrecer.

Observación: Observando el comportamiento de la gráfica, podemos notar que las medidas de sanidad tomadas por el gobierno se ven reflejadas, pues fue en junio 2020 cuándo se entro en semáforo rojo, y luego en diciembre 2020 por segunda vez, justamente por esas fechas se nota el decrecimiento de la tasa de infección.

Observación: Aquí se puede apreciar que con la tasa de infección estimada, se obtuvo un muy buen ajuste a los datos oficiales reportados de los infectados acumulados.

Observación: Un detalle notorio, se aprecia un cambio de concavidad en la gráfica de los datos oficiales reportados entre junio y julio de 2021, la cuál, nuestro ajuste no logra replicar. Creemos que esto es debido a que no penaliza suficiente este nuevo incremento en comparación a los datos anteriores.

Trabajos futuros

- Cálculo de la tasa de infección variable usando particiones adaptativas del intervalo $[0, T]$.
- Evaluar la efectividad de las medidas sanitarias tomadas para el control de la pandemia.
- Desarrollar un análisis a posteriori de la convexidad local de la funcional objetivo.

References

- [1] G. Alaïre, *Numerical analysis and Optimization. An Introduction to Mathematical Modelling and Numerical Simulation*, Oxford U. Press (2007).
- [2] Kelley.C.T., *Direct Search Algorithms*, SIAM, 1999.
- [3] Kermack,W.O., McKendrick, A.G., *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*, Proc. Royal Soc. of London, series A, vol. 115, no. 772 (1927) 700-721.