



Método de Newton para búsqueda en línea en el espacio de Hilbert

$$(L^2(0, T))^3.$$

Autor: Lic. Cinthia Naty Cortazar Cortazar.

Coautor: Dr. Jorge López López.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

División Académica de Ciencias Básicas.

Maestría en Ciencias en Matemáticas Aplicadas.



1. Resumen.

En este trabajo describimos el método de Newton para resolver numéricamente un problema de búsqueda en línea de la forma

$$\text{Mín}_{\rho \in \mathbb{R}} J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}) \quad (1)$$

donde \mathbf{u} y \mathbf{w} son elementos fijos en el espacio de Hilbert $V = (L^2(0, T))^3$. El funcional J está asociado a un problema de control de un circuito de tres juntas de Josephson acopladas inductivamente, es decir, J depende directamente de un control \mathbf{v} y de una variable de estado $\mathbf{y}(t, v)$, solución de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de 3×3 . Para aplicar Newton definimos, para ρ real, $g(\rho) = J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w})$, calculamos $g'(\rho)$ y $g''(\rho)$ en términos de $DJ(\mathbf{v})$, el diferencial de Frechet de J . Aplicando la iteración de Newton resolvemos $g'(\rho) = 0$. Presentamos resultados para algunos pares (\mathbf{u}, \mathbf{w}) .

2. Objetivo.

Aplicar el método de Newton para resolver computacionalmente los problemas de búsqueda en línea del tipo (1).

3. Introducción.

$$J(\mathbf{v}) = \frac{\eta}{2} \int_0^T \|\mathbf{v}\|_E^2 dt + \frac{k}{2} \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T\|_E^2, \quad (2)$$

donde $\mathbf{v} = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$, $\|\cdot\|_E$ es la norma euclidiana en \mathbb{R}^3 y se aplica para cada valor de t , \mathbf{y}_T es conocido en \mathbb{R}^3 , η es un parámetro de regularización, k es un parámetro de penalización y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ es la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\mathbf{y}}{dt} + K\mathbf{y} + \sin \mathbf{y} = D \text{ en } (0, T), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{cases} \quad (3)$$

con $D = (i + v_1, i_2 + v_2, i_3 + v_3)^t$, \mathbf{y}_0 , Γ (diagonal) y K (simétrica) conocidos.

Este problema de búsqueda en línea aparece por ejemplo cuando se quiere resolver por gradiente conjugado el problema de controlar el sistema para \mathbf{y} que modela la dinámica de un circuito de tres juntas de Josephson acopladas inductivamente y controladas vía las 3 juntas de Josephson.

4. Desarrollo.

La idea principal es definir $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(\rho) = J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}), \quad (4)$$

y minimizarla resolviendo la ecuación $g'(\rho) = 0$. Para describir $g'(\rho)$ en términos de J necesitamos la siguiente definición y los siguientes teoremas:

DEFINICIÓN 4.1 Sea H un espacio de Hilbert. Un funcional J sobre H es Frechet-diferenciable si, para todo $v, z \in H$, existe $DJ(v) \in H'$, la derivada o el diferencial de J en v , tal que

$$J(v + z) - J(v) = \langle DJ(v), z \rangle + \|z\| \varepsilon(v, z), \quad (5)$$

con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotando par de dualidad, y $\varepsilon(v, z)$ tendiendo a cero cuando $\|z\| \rightarrow 0$.

En V usamos el producto interior

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_0^T \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} dt,$$

y tenemos en cuenta que aquí se cumple el teorema de representación de Riesz.

TEOREMA 4.2 Sea J un funcional Frechet-diferenciable sobre V , entonces

$$g'(\rho) = \frac{d}{d\rho} J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}) = -\langle DJ(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle. \quad (6)$$

TEOREMA 4.3 Si J está definido como en (2) se tiene que es Frechet-diferenciable y si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ se definen como la solución del problema:

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} + K\mathbf{p} + C(\mathbf{y}) \mathbf{p} = \mathbf{0} \text{ en } (0, T), \\ \Gamma \mathbf{p}(T) = k(\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T), \end{cases} \quad (7)$$

entonces el diferencial del funcional J está dado por

$$DJ(\mathbf{v}) = \eta \mathbf{v} + \mathbf{p}.$$

Del teorema anterior y el teorema de Riesz, se tiene que

$$g'(\rho) = -(\eta(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}) + \mathbf{p}, \mathbf{w}) = - \int_0^T (\eta(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}) + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} dt, \quad (8)$$

donde \mathbf{p} se obtiene resolviendo (7) después de obtener $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ resolviendo (3) pero con $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho \mathbf{w}$.

Para calcular $g''(\rho) = \frac{dg'}{d\rho}$ usamos la regla de Leibniz para la diferenciación bajo el signo integral, de la cual se tiene que

$$g''(\rho) = \int_0^T [\eta \mathbf{w} - \dot{\mathbf{p}}_\rho] \cdot \mathbf{w} dt, \quad (9)$$

donde $\dot{\mathbf{p}}_\rho$ se obtiene resolviendo

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\dot{\mathbf{y}}_\rho}{dt} + K\dot{\mathbf{y}}_\rho + \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_\rho = \begin{pmatrix} -w_1 \\ -w_2 \\ -w_3 \end{pmatrix} \text{ en } (0, T), \\ \dot{\mathbf{y}}_\rho(0) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

y después

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\dot{\mathbf{p}}_\rho}{dt} + K\dot{\mathbf{p}}_\rho + \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_\rho = \\ \begin{pmatrix} \sin y_{1\rho} \dot{y}_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \sin y_{2\rho} \dot{y}_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \sin y_{3\rho} \dot{y}_{3\rho} \end{pmatrix} \mathbf{p}_\rho \text{ en } (0, T), \\ \Gamma \dot{\mathbf{p}}_\rho(T) = k\dot{\mathbf{y}}_\rho(T). \end{cases} \quad (11)$$

Así, la iteración del método de Newton para aproximar ρ^* , el mínimo de g está dada, para ρ_0 dado e $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ por

$$\rho_{i+1} = \rho_i - \frac{g'(\rho_i)}{g''(\rho_i)}. \quad (12)$$

Se realizó una discretización del problema de búsqueda en línea (1) para llevar a cabo computacionalmente la iteración de Newton (12). Se hizo una partición uniforme del intervalo $(0, T)$ donde T es el tiempo final, N número de subintervalos de la partición uniforme y $h = \frac{T}{N}$ tamaño de cada subintervalo. En esta partición, las funciones en L^2 se aproximan por funciones lineales por pedazos, las cuales se pueden representar, para fines computacionales, por vectores en $\mathbb{R}^{(N+1)}$.

5. Resultados numéricos.

EJEMPLO 5.1 En este ejemplo tomamos $u_1(t) = -(t-2)\exp(-t)$, $u_2(t) = 3t^2 + 1$, $u_3(t) = (t-1)^2 + 1$ y $w_1(t) = t^3 + t - 1$, $w_2(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$ y $w_3(t) = \exp(-t)/10$.

Las gráficas de \mathbf{u} y \mathbf{w} se muestran en las Figuras 1 y 2. Para la discretización y cálculos se tomaron los valores siguientes:

- $T = 12$.
- $k = 1.0e - 3$.
- $\mathbf{y}_0 = [0.1992; 0.1187; -0.1552]$.
- $\mathbf{y}_T = [0.1810; 0.0338; -0.0515]$.
- $\rho^0 = 0.5$.
- $h = T/500$.
- $\eta = 1$.

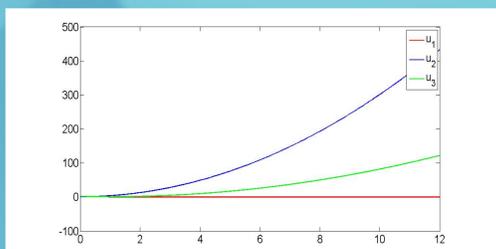


Figura 1: Funciones $u_1(t) = -(t-2)\exp(-t)$, $u_2(t) = 3t^2 + 1$, $u_3(t) = (t-1)^2 + 1$ para el ejemplo 5.1.

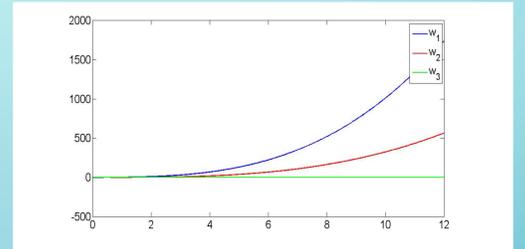


Figura 2: Funciones $w_1(t) = t^3 + t - 1$, $w_2(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$ y $w_3(t) = \exp(-t)/10$ para el ejemplo 5.1.

Dadas las funciones \mathbf{u} y \mathbf{w} llevamos a cabo la iteración de Newton para minimizar $J(\mathbf{u}(t) - \rho \mathbf{w}(t))$ sobre ρ y en 6 iteraciones se obtuvo el valor $\rho^* = 0.084$. La gráfica del funcional J restringido a la recta $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho \mathbf{w}$ se muestra en la Figura 3.

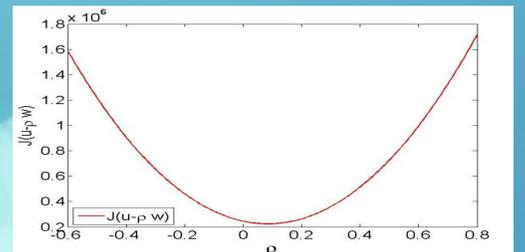


Figura 3: Función $J(\mathbf{u}(t) - \rho \mathbf{w}(t))$ para las funciones \mathbf{u} y \mathbf{w} que se muestran en las Figuras 1 y 2.

La derivada con respecto a ρ de la restricción de J a la recta $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho \mathbf{w}$ se muestra en la Figura 4.

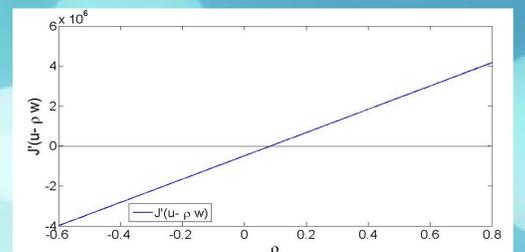


Figura 4: Derivada con respecto a ρ de $J(\mathbf{u}(t) - \rho \mathbf{w}(t))$ para las funciones \mathbf{u} y \mathbf{w} que se muestran en las Figuras 1 y 2.

6. Conclusión.

- Se logró implementar en MatLab un programa en donde aplicamos el método de Newton para resolver computacionalmente un problema de búsqueda en línea de la forma (1).
- De acuerdo con los ejemplos estudiados se concluye que el método de Newton produce resultados excelentes.

7. Referencias.

- [1] R.L. Burden y J. D. Faires, Análisis Numérico. International Thompson Editorers, 6a Edición, México (1998).
- [2] H.L. Royden, Real Analysis. Pearson Education, Third Edition, New Jersey, (1988).
- [3] David Poole, Álgebra lineal, una introducción moderna. Tercera Edición, Trent University, (2011).
- [4] Helga Fetter y Berta Gamboa, Introducción al Análisis Funcional y a la Geometría de Espacios de Banach. Centro de investigación de Matemáticas, (2008).
- [5] Jorge López. Métodos variacionales, optimización y control: aplicación a la recuperación de campos vectoriales y estabilización de arreglos de memoria de juntas de Josephson, Tesis doctoral. Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa (2016).